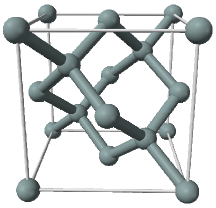
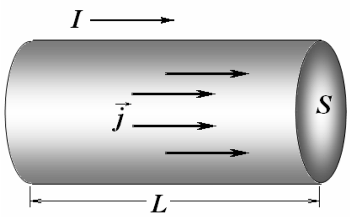


Задание 3. Полупроводник.

1.1 По закону Ома для участка цепи сила тока равна

$$I = \frac{U}{R}. \quad (1)$$



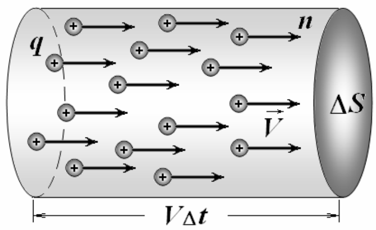
Подставляя известные формулы:

- сопротивления проводника $R = \rho \frac{L}{S}$;
- связи напряжения и напряженности $U = EL$;
- связи силы и плотности тока $I = jS$

в уравнение (1), получим $jS = \frac{EL}{\rho \frac{L}{S}}$, откуда следует, что $j = \frac{1}{\rho} E = \sigma E$. Очевидно, что направление движения заряженных частиц совпадает с направлением вектора напряженности электрического поля, поэтому

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (2)$$

1.2 За время Δt площадку площадью ΔS, расположенную перпендикулярно векторам скоростей частиц, пересекут частицы, находящиеся от площадки на расстоянии $v\Delta t$. Объем области, опирающейся на выделенную площадку, частицы в котором пересекут площадку равен $\Delta V = v\Delta t \cdot \Delta S$, число частиц в нем $N = n\Delta V = nv\Delta t \cdot \Delta S$, они переносят заряд $\Delta Q = qN = qnv\Delta t \cdot \Delta S$. По определению плотности тока, получим



$$j = \frac{\Delta Q}{\Delta t \cdot \Delta S} = qnv. \quad (3)$$

1.3 Приравнивая выражения для плотности тока (2) и (3), получим

$$env = \sigma E. \quad (4)$$

Из этой формулы выразим среднюю скорость движения частиц $v = \frac{\sigma}{en} E$. Сравнивая это выражение с определением подвижности $\langle v \rangle = \mu E$, находим, что проводимость металла находится по формуле

$$\sigma = en\mu. \quad (5)$$

2.1 Для вычисления удельной проводимости полупроводника необходимо учесть, что ток обусловлен движением как свободных электронов, так и дырок. Не смотря на то, что электроны и дырки движутся в противоположных направлениях, электрические токи, обусловленные их движением, направлены в одну сторону (в сторону движения положительно заряженных дырок). С помощью формулы (5) находим

$$\sigma_0 = e\left(n_i \mu_n + p_i \mu_p\right) = e\overline{n}\left(\mu_n + \mu_p\right). \quad (6)$$

При подстановке численных значений из Таблицы справочных материалов их необходимо перевести в единицы системы СИ:

$$\sigma_0 = e\bar{n}(\mu_n + \mu_p) = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\,Кл \cdot 1{,}0 \cdot 10^{16}\,м^{-3}(1{,}4 \cdot 10^3 + 0{,}45 \cdot 10^3) \cdot 10^{-4}\,\frac{м^2}{В \cdot с} \approx \approx 3{,}0 \cdot 10^{-4}\,Ом^{-1} \cdot м^{-1} \quad (7)$$

2.2 Из приведенной в условии формулы

$$\sigma = \sigma_0(1 + \gamma \Delta T)$$

Следует, что температурный коэффициент равен

$$\gamma = \frac{1}{\sigma_0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta T},$$

При малых изменениях температуры отношение приращений следует заменить соответствующей производной[1] $\gamma = \frac{1}{\sigma_0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta T} = \frac{\sigma'}{\sigma_0}$.

При повышении температуры увеличивается концентрация носителей тока, что и приводит к увеличению проводимости. Так проводимость пропорциональна концентрации носителей, то

$$\frac{1}{\sigma_0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta T} = \frac{\sigma'}{\sigma_0} = \frac{1}{\bar{n}}\frac{\Delta\bar{n}}{\Delta T} = \frac{\bar{n}'}{\bar{n}}. \quad (8)$$

Выражение для равновесной концентрации приведено в условии задачи. Указанное отношение проще вычислить с помощью известного математического приема (хотя можно пользоваться и простыми правилами вычисления производных):

$$\begin{gathered} \bar{n} = AT^{3/2}\exp\left(-\frac{E_g}{kT}\right) \Rightarrow \ln\bar{n} = \ln A + \frac{3}{2}\ln T - \frac{E_g}{kT} \Rightarrow \\ \frac{\bar{n}'}{\bar{n}} = \frac{3}{2}\frac{1}{T} + \frac{E_g}{kT^2} = \frac{1}{T}\left(\frac{3}{2} + \frac{E_g}{kT}\right) \end{gathered}. \quad (9)$$

При расчетах необходимо правильно перевести электрон-вольты в джоули с помощью соотношения $E_g[Дж] = eE_g[эВ]$:

$$\gamma = \frac{1}{T}\left(\frac{3}{2} + \frac{E_g}{kT}\right) = \frac{1}{300K}\left(\frac{3}{2} + \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 1{,}12}{1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}\right) \approx 0{,}15\,K^{-1}. \quad (10)$$

3.1.1 Красной границе фотоэффекта соответствую фотоны, энергия которых равна ширине энергетической зоны

$$h\nu_{кр.} = E_g. \quad (11)$$

Расчет длины волны не представляет труда

$$\frac{hc}{\lambda_{кр.}} = E_g \Rightarrow \lambda_{кр.} = \frac{hc}{E_g} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\,Дж \cdot с \cdot 3{,}0 \cdot 10^8\,\frac{м}{с}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,Кл \cdot 1{,}12эВ} \approx 1{,}0 \cdot 10^{-6}\,м = 1{,}0\,мкм \quad (12)$$

3.1.2 Преобразуем выражение для коэффициента поглощения к виду, удобному для дальнейших расчетов:

[1] Для тех, кто не знаком с производными: можно также воспользоваться приближенными формулами для расчета изменения функций.

$$\alpha = B(h\nu - E_g)^2 = BE_g^2\left(\frac{hc}{E_g\lambda} - 1\right)^2 = b\left(\frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} - 1\right)^2, \tag{13}$$

Здесь $b = BE_g^2 = 3{,}9 \cdot 10^3 \frac{см^{-1}}{эВ^2}(1{,}12эВ)^2 = 4{,}9 \cdot 10^5\, м^{-1}$ - постоянная величина; $\lambda_{кр.} = 1{,}0\, мкм$ - длина волны красной границы фотоэффекта.

3.1.3 В единицу времени на пластинку падает $\frac{I_0}{h\nu}S$ фотонов (S - площадь поверхности), из них $\frac{I_0}{h\nu}S \cdot \alpha h$ поглощается, что приводит к появлению $\frac{I_0}{h\nu}S \cdot \alpha h \cdot \eta$ электронно-дырочных пар. Следовательно, в единице объема в единицу времени появляется $G_r = \frac{1}{V}\left(\frac{I_0}{h\nu}Sh\alpha\eta\right) = \frac{I_0\lambda}{hc}\alpha\eta$ пар электронов (это есть скорость генерации).

3.2.1 Концентрация электронов в проводнике изменяется в ходе генерации и регенерации, поэтому уравнение изменения концентрации может быть записано в виде

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = G_T + G_r - R \tag{14}$$

3.2.2 При отсутствии освещения скорость изменения концентрации носителей тока можно представить в форме уравнения

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = G_T - R, \tag{15}$$

Представим концентрации носителей тока в виде $n = \overline{n} + n_1$. Скорость рекомбинации пропорциональна квадрату концентрации свободных электронов, поэтому запишем $R = rn^2 = r(\overline{n} + n_1)^2$, где r - некоторый коэффициент пропорциональности. Теперь уравнение (11) принимает вид

$$\frac{\Delta(\overline{n} + n_1)}{\Delta t} = G_T - r(\overline{n} + n_1)^2 = G_T - r\overline{n}^2 - 2r\overline{n} \cdot n_1 - rn_1^2. \tag{16}$$

При $\overline{n} >> n_1$ можно пренебречь слагаемым пропорциональным n_1^2. Кроме того, равновесная концентрация носителей удовлетворяет условию $G_T = r\overline{n}^2$. Таким образом, уравнение (12) приобретает требуемый вид

$$\frac{\Delta n_1}{\Delta t} = -2r\overline{n} \cdot n_1. \tag{17}$$

Введенный коэффициент рекомбинации выражается через время жизни электронно-дырочной пары

$$2r\overline{n} = \frac{1}{\tau} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2\overline{n}\,\tau}. \tag{18}$$

Таким образом, скорость тепловой генерации выражается формулой

$$G_T = r\overline{n}^2 = \frac{1}{2\tau}\overline{n}, \tag{19}$$

а скорость рекомбинации

$$R = rn^2 = \frac{n^2}{2\overline{n}\,\tau}. \tag{20}$$

3.2.4 В стационарном режиме концентрация свободных электронов не изменяется, следовательно, в этом случае выполняется соотношение

$$G_T + G_r - R = 0. \qquad (21)$$

Подставим в это уравнение полученные ранее выражения для скоростей потоков и коэффициента поглощения

$$\frac{1}{2\tau}\bar{n} + \frac{I_0\lambda}{hc}\alpha\eta - \frac{n^2}{2\bar{n}\,\tau} = 0.$$

Из этого уравнения получаем

$$\frac{n^2}{\bar{n}^2} = 1 + 2\frac{I_0\lambda}{hc\bar{n}}\alpha\eta\tau = 1 + 2\frac{I_0\lambda}{hc\bar{n}}\eta\tau b\left(\frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} - 1\right)^2.$$

Для упрощения расчетов перепишем данное выражение в виде

$$\frac{n^2}{\bar{n}^2} = 1 + 2\frac{I_0\lambda}{hc\bar{n}}\eta\tau b\left(\frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} - 1\right)^2 =$$
$$= 1 + 2\frac{I_{00}\lambda_{кр.}}{hc\bar{n}}\eta\tau b\frac{I_0}{I_{00}}\frac{\lambda}{\lambda_{кр.}}\left(\frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} - 1\right)^2 = 1 + W\frac{I_0}{I_{00}}\frac{\lambda}{\lambda_{кр.}}\left(\frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} - 1\right)^2 \qquad (22)$$

где в одном безразмерном коэффициенте объединились все параметры кремния

$$W = 2\frac{I_{00}\lambda_{кр.}}{hc\bar{n}}\eta\tau b = 2\frac{10^4\,\frac{Вт}{м^2}\cdot 1{,}0\cdot 10^{-6}\,м}{6{,}63\cdot 10^{-34}\,Дж\cdot с\cdot 3{,}0\cdot 10^8\,\frac{м}{с}\cdot 1{,}0\cdot 10^{16}\,м^{-3}}0{,}1\cdot 3{,}0\cdot 10^{-3}\,с\cdot 4{,}9\cdot 10^5\,м^{-1} = ,$$

$$= 1{,}5\cdot 10^9$$

(здесь $I_{00} = 1\frac{Вт}{см^2} = 10^4\,\frac{Вт}{м^2}$ - единица измерения интенсивности).

Окончательно получаем искомую формулу

$$\frac{n}{\bar{n}} = \sqrt{1 + W\frac{I_0}{I_{00}}\frac{\lambda}{\lambda_{кр.}}\left(\frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} - 1\right)^2}. \qquad (23)$$

3.3.1 Сила тока через фоторезистор при постоянном напряжении на нем пропорциональна проводимости фоторезистора, которая в свою очередь пропорциональна концентрации носителей тока. Следовательно, формула (19) также описывает изменение силы тока

$$\frac{i}{i_0} = \sqrt{1 + W\frac{I_0}{I_{00}}\frac{\lambda}{\lambda_{кр.}}\left(\frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} - 1\right)^2}. \qquad (24)$$

3.3.2 Подставляя значение длины волны в выражение (20), вычислим значение коэффициента при интенсивности

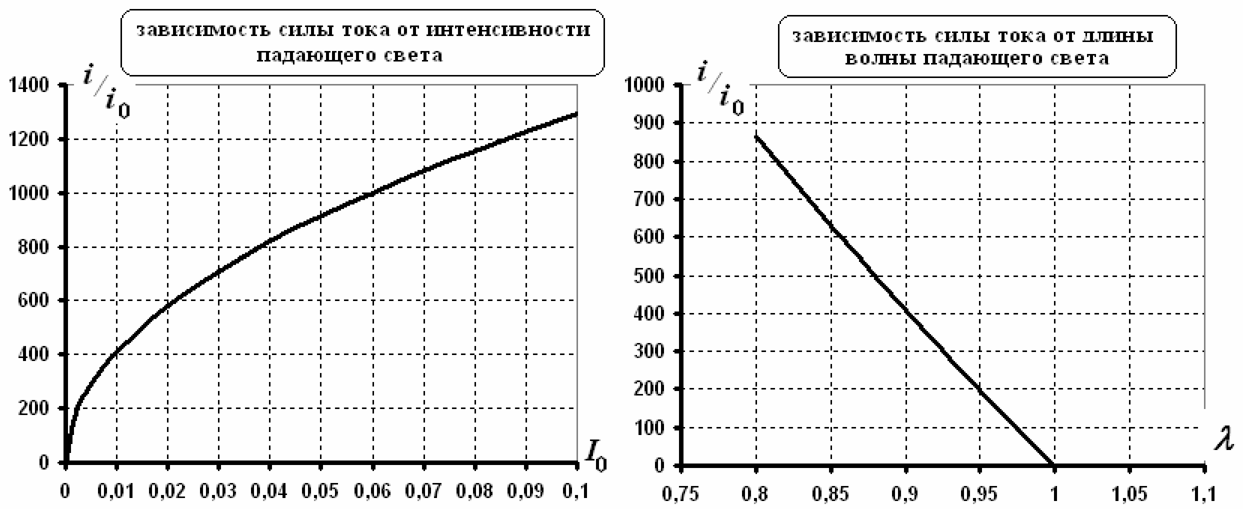
$$W\frac{\lambda}{\lambda_{кр.}}\left(\frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} - 1\right)^2 = 1{,}5\cdot 10^9\cdot 0{,}9\cdot\left(\frac{1}{0{,}9} - 1\right)^2 \approx 1{,}67\cdot 10^7.$$

Такое большое значение этого коэффициента позволяет пренебречь 1 под корнем, то есть сила тока пропорциональна корню квадратному из интенсивности падающего света. График этой зависимости показан на рисунке.

3.3.3 В данном случае требуется построить график функции

$$\frac{i}{i_0} = \sqrt{1 + 1{,}5 \cdot 10^7 \, \frac{\lambda}{\lambda_{кр.}} \left(\frac{\lambda_{кр.}}{\lambda} - 1 \right)^2} \,. \tag{25}$$

При построении следует учесть, что при $\lambda > \lambda_{кр.}$ фотоэффект отсутствует, поэтому в этой



области $i = i_0$. При $\lambda < \lambda_{кр.}$ искомая зависимость практически линейна (см. рисунок).