Решения задач.

Задание 1. «Маленький принц»

1.1 По второму закону Ньютона (с учетом закона всемирного тяготения)

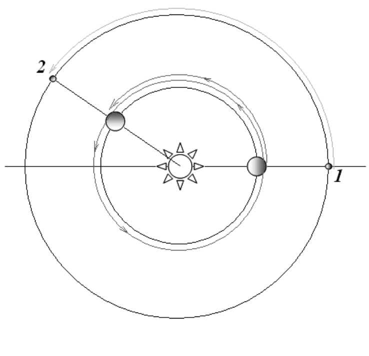
$$G\frac{M_C m}{R^2} = m\frac{4\pi^2}{T^2}R, \qquad (1)$$

где m – масса планеты, R – радиус орбиты планеты, T - период обращения планеты вокруг Солнца. Сравнив движение Астероида и Земли, получим

$$T_A = T_З\sqrt{\left(\frac{R_A}{R_З}\right)^3} \approx 1\sqrt{\left(\frac{2,5}{1}\right)^3} \approx 4,0\,года. \qquad (2)$$

1.2. Наименьшее расстояние между астероидом и Землей будет, когда Солнце, Земля и Астероид установятся на одной прямой (точка 1 на рис.). При этом расстояние между Астероидом и Землей равно

$$L = R_A - R_З = 1,5\,а.е. \approx 2,2\cdot 10^{11}\,м. \qquad (3)$$



Следующий раз такая ситуация повторится, когда Земля в своем движении вокруг Солнца обгонит астероид на угол 2π, (или $360°$) - точка 2. Относительная угловая скорость Земли относительно астероида равна $\omega_{отн.} = \omega_З - \omega_A = \frac{2\pi}{T_З} - \frac{2\pi}{T_A}$.

Следовательно, время движения можно рассчитать по формуле

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_{отн.}} = \frac{2\pi}{\frac{2\pi}{T_З} - \frac{2\pi}{T_A}} = \frac{T_З T_A}{T_A - T_З} \approx 1,33\,года. \qquad (4)$$

Таким образом, следующий раз минимальное расстояние между Землей и Астероидом случится через 1,33 года, т.е. примерно 1 мая 2010 года.

1.3. На любое тело, на поверхности Астероида, действует сила всемирного тяготения, сообщающая ему ускорение g_A, которое можно выразить из уравнения

$$mg_A = G\frac{M_A m}{r_A^2}; \quad \Rightarrow \quad g_A = G\frac{M_A}{r_A^2}. \qquad (5)$$

Масса Астероида выражается через его плотность

$$M_A = \rho V = \frac{4}{3}\pi r_A^3 \rho. \qquad (6)$$

Подстановка формулы для массы в формулу (5) и последующий расчет приводит к результату

$$g_A = \frac{4\pi}{3}Gr_A\rho = \frac{4\pi}{3}\cdot 6,67\cdot 10^{-11}\cdot 10\cdot 10^3\cdot 2,7\cdot 10^3 \approx 7,5\cdot 10^{-3}\,\frac{м}{с^2}. \qquad (7)$$

1.4. Первая космическая скорость соответствует скорости движения по круговой орбите с радиусом, равным радиусу астероида, поэтому

$$m\frac{v^2}{r_A} = mg_A \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{g_A r_A} = \sqrt{7,5\cdot 10^{-3}\cdot 10\cdot 10^3} \approx 8,7\,\frac{м}{с}. \qquad (8)$$

1.5. Вес тела на полюсе планеты численно равен силе тяжести, действующей на тело

$$P_0 = mg_A . \quad (9)$$

На экваторе планеты вес тела уменьшается из-за суточного вращения планеты, поэтому на экваторе вес тела оказывается равным

$$P_1 = mg_A - m\omega^2 r_A = mg_A - m\frac{4\pi^2}{T_A^2} r_A = mg_A\left(1 - 4\pi^2 \frac{r_A}{T_A^2 g_A}\right). \quad (10)$$

Следовательно, относительное изменение веса тела равно

$$\eta = 4\pi^2 \frac{r_A}{T_A^2 g_A} . \quad (11)$$

Из этой формулы следует, что период обращения Астероида вокруг собственной оси (т.е. сутки) рассчитывается по формуле

$$T_A = 2\pi\sqrt{\frac{r_A}{\eta g_A}} \approx 2{,}3\cdot 10^4\, c \approx 6{,}4\, часа . \quad (12)$$

1.6.1 Высота прыжка рассчитывается по известной формуле

$$h = \frac{v_0^2}{2g} . \quad (13)$$

Так как начальная скорость прыжка одинакова на Земле и Астероиде, то высота прыжка оказывается обратно пропорциональной ускорению свободного падения, поэтому высота прыжка на Астероиде будет равна

$$h = h_0 \frac{g_З}{g} \approx 0{,}65\cdot 10^3\, м . \quad (14)$$

1.6.2 Ускорение свободного падения на высоте h рассчитывается по формуле

$$g = G\frac{M}{(r+h)^2} = G\frac{M}{r^2}\frac{r^2}{(r+h)^2} = g_0 \frac{r^2}{(r+h)^2} , \quad (15)$$

здесь r - радиус планеты, g_0 - ускорение свободного падения на поверхности планеты.

Таким образом, относительное уменьшение ускорения свободного падения равно

$$\varepsilon = \frac{g_0 - g}{g_0} = 1 - \left(\frac{r}{r+h}\right)^2 \approx 12\% . \quad (16)$$

1.6.3 Уточнить найденную приближенно высоту прыжка можно, заменив в формуле (13) ускорение свободного падения на поверхности на среднее значение ускорения на поверхности и на найденной максимальной высоте, то есть положить

$$\bar{h} = \frac{v_0^2}{2\frac{g_0 + g_h}{2}} = \frac{v_0^2}{2g_0}\frac{2}{1+\frac{g_h}{g_0}} = h\frac{2}{1+\left(\frac{r}{r+h}\right)^2} = h\frac{2}{2-\varepsilon} \approx 1{,}06h \approx 0{,}69\cdot 10^3\, м . \quad (17)$$

Таким образом, учет зависимости ускорения свободного падения от высоты приводит к увеличению высоты примерно на 6%, что составляет примерно 40 м.

Небольшое дополнение.

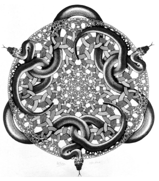
Пункт 1.6 может быть решен точно при использовании закона сохранения энергии и формулы для энергии гравитационного взаимодействия тел

$$\frac{mv_0^2}{2} = G\frac{Mm}{r} - G\frac{Mm}{r+h} . \quad (18)$$

Решить данное уравнение не сложно:

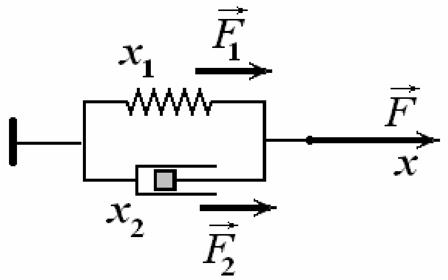
$$\frac{v_0^2}{2} = G\frac{M}{r} - G\frac{M}{r+h} = G\frac{M}{r}\left(1 - \frac{r}{r+h}\right) = g_0 r\frac{h}{r+h}$$

$$\frac{v_0^2}{2g_0}r + \frac{v_0^2}{2g_0}h = rh \quad \Rightarrow \quad \bar{h} = \frac{v_0^2}{2g_0}\frac{1}{1-\frac{v_0^2}{2g_0 r}} = \frac{h}{1-\frac{h}{r}} \approx 0{,}695\cdot 10^3\,м \tag{19}$$



Задание 2. Реология

Часть 1. Демпфер и пружина.



1.1 Деформации элементов одинаковы, а внешняя сила уравновешивается силой упругости пружины и демпфера:

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = x \\ F_1 + F_2 = F \end{cases} \qquad (1).$$

Используя формулы (1) и (2) из условия задачи составим уравнение:

$$kx + av = F \qquad (2),$$

Из которого получаем выражение для скорости

$$v = \frac{F - kx}{a} \qquad (3).$$

Зависимость скорости деформации от величины деформации представляет собой отрезок прямой, пересекающей ось v в точке $\frac{F}{a}$ и ось x в точке $\frac{F}{k}$.

В начальный момент времени деформация отсутствует, $x = 0$, поэтому скорость деформации будет максимальна и равна:

$$v_0 = \frac{F}{a} \qquad (4).$$

Затем, по мере увеличения деформации, скорость деформации будет становиться все меньше и меньше (асимптотически приближаться к нулю).

Величина деформации x вначале достаточно быстро увеличивается, а затем, т.к. скорость уменьшается, постепенно приближается своему равновесному значению:

$$x_P = \frac{F}{k} \qquad (5).$$