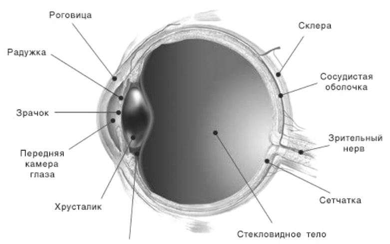
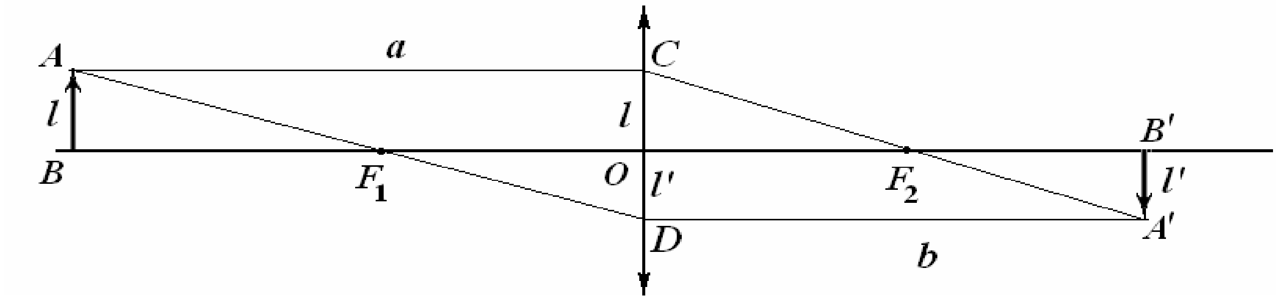


Задание 3. Глаз.

Часть 1. Введение.



1.1 Построение изображения проводится традиционно:

- от точки A проводим луч AC, параллельный главной оптической оси, после преломления луч пройдет через точку заднего фокуса CF_2;

- от точки A проводим луч, проходящий через точку переднего фокуса F_1 до пересечения с плоскостью линзы AF_1D, после преломления этот луч пойдет параллельно главной оптической оси; продлеваем его до пересечения с лучом CF_2 - точки A', которая и является изображением точки A.

1.2 Обозначим размер предмета AB - l, а размер изображения $A'B'$ - l'. Из подобия треугольников ACD и F_1OD следует

$$\frac{l+l'}{a} = \frac{l'}{F}. \tag{1}$$

Аналогично, из подобия треугольников $A'CD$ и F_2OC следует

$$\frac{l+l'}{b} = \frac{l}{F}. \tag{2}$$

Складывая эти уравнения, получим требуемое соотношение

$$\frac{l+l'}{a} + \frac{l+l'}{b} = \frac{l+l'}{F} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F}. \tag{3}$$

1.3 Прежде всего, с помощью формулы линзы найдем расстояние от линзы до изображения предмета

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \quad \Leftrightarrow \quad b = \frac{aF}{a-F}. \tag{4}$$

Теперь подставим в полученную формулу линзы (3), измененные расстояния от линзы до предмета и до изображения

$$\frac{1}{a+\Delta a} + \frac{1}{b+\Delta b} = \frac{1}{F}$$

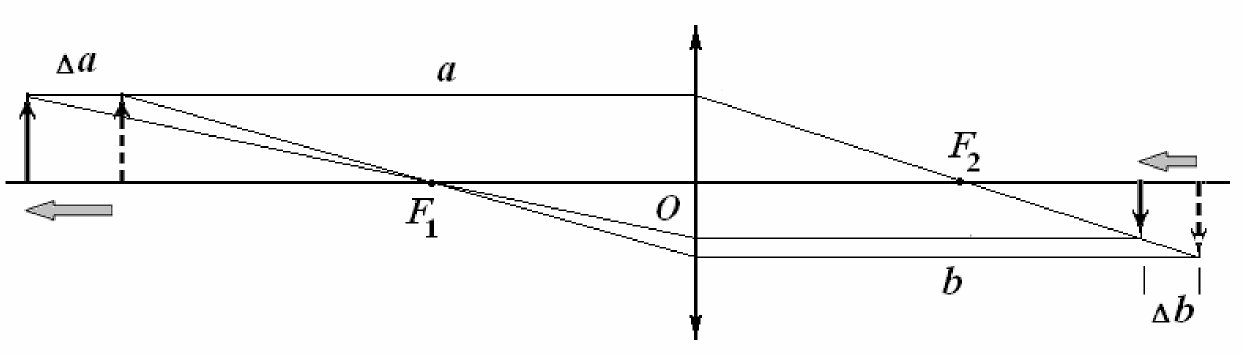
и воспользуемся приведенной в условии приближенной формулой для обоих слагаемых:

$$\frac{1}{a} - \frac{\Delta a}{a^2} + \frac{1}{b} - \frac{\Delta b}{b^2} = \frac{1}{F}.$$

Из этого соотношения (с учетом связи между исходными расстояниями) получим требуемый результат:

$$\frac{\Delta b}{b^2} = -\frac{\Delta a}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta b = -\Delta a\left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\Delta a\left(\frac{F}{a-F}\right)^2. \tag{5}$$

Знак минус указывает, что при удалении предмета от линзы его изображение приближается к ней. Рисунок иллюстрирует полученный алгебраический результат.



Часть 2. Изменение фокусного расстояния глаза.

Наиболее отчетливое изображение получается в том случае, когда изображение предмета оказывается на экране (сетчатке), то есть когда расстояние от линзы до изображения равно диаметру глазного яблока

$$b = D. \quad (6)$$

2.1 Фокусные расстояния можно вычислить с помощью формулы линзы. В первом случае, когда $a_1 \to \infty$, фокусное расстояние зрачка равно диаметру глазного яблока $F_1 = D = 24\,мм$. Когда расстояние до рассматриваемого предмета равно a_0, фокусное расстояние оказывается равным

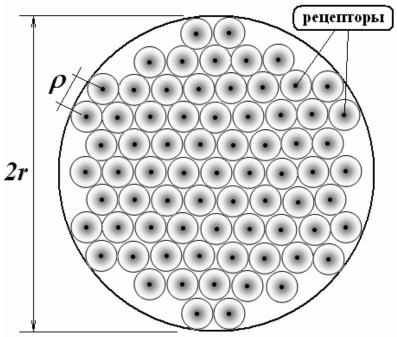
$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{D} = \frac{1}{F} \quad \Rightarrow \quad F_0 = \frac{a_0 D}{a_0 + D} = \frac{250 \cdot 24}{250 + 24} \approx 21{,}9\,мм.$$

Таким образом, фокусное расстояние зрачка изменяется в пределах

$$F_{\min} = 22\,мм, \quad F_{\max} = 24\,мм. \quad (7)$$

Часть 3. Глубина резкости.

В данной части задачи следует принять во внимание дискретную структуру рецепторов сетчатки. Поэтому сначала вычислим среднее расстояние ρ между отдельными рецепторами (колбочками). Можно считать, что рецепторы расположены по желтому пятну равномерно. Пусть на каждый рецептор приходится площадь $s = \frac{1}{4}\pi\rho^2$, а N_2 рецепторов покрывают всю площадь желтого пятна $S = \pi r^2$. Тогда расстояние радиус кружка, приходящегося на один рецептор, оценивается следующим образом

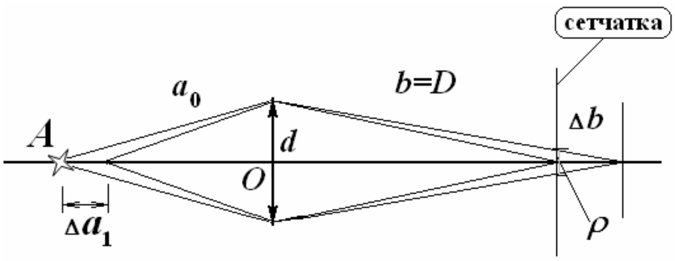


$$N_2 \frac{1}{4}\pi\rho^2 = \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{2r}{\sqrt{N_2}} \approx \frac{2 \cdot 2{,}5}{\sqrt{6{,}0 \cdot 10^6}} \approx 2{,}0 \cdot 10^{-3}\,мм. \quad (8)$$

Интересно отметить, что расстояние между рецепторами не намного превышает длину световой волны видимого диапазона.

3.1 Если размер пятна на сетчатке меньше, чем среднее расстояние между рецепторами, глаз (точнее мозг) будет воспринимать это пятно как точку, то есть четкое изображение.

Следовательно, положение изображения, формируемого зрачком, может не попадать точно на сетчатку, а отстоять от нее на некотором расстоянии Δb, таком, чтобы размер пятна на экране не превышал ρ. Рисунок иллюстрирует ход лучей в такой ситуации (масштаб смещения сильно преувеличен). Диаметр зрачка обозначен $d = 4{,}0\,мм$.



Из рисунка следует, что предельное смещение изображения должно удовлетворять соотношению

$$\frac{\rho}{\Delta b} = \frac{d}{D + \Delta b}.$$

Учитывая, что $\Delta b << D$, получим

$$\Delta b = \frac{D\rho}{d}. \qquad (9)$$

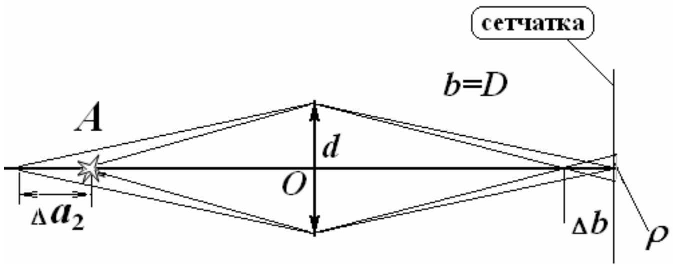
Теперь можно воспользоваться соотношением (5) для определения возможного смещения рассматриваемого предмета

$$\frac{\Delta b}{b^2} = -\frac{\Delta a}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta a_1 = -\Delta b\left(\frac{a}{b}\right)^2 = -\rho\frac{D}{d}\left(\frac{a_0}{D}\right)^2 = -2{,}0\cdot 10^{-3}\,\frac{24}{4{,}0}\left(\frac{250}{24}\right)^2 \approx -1{,}3\,мм. \qquad (10)$$

3.2 В этом случае решение полностью аналогично, что подтверждается рисунком хода лучей при удалении предмета.

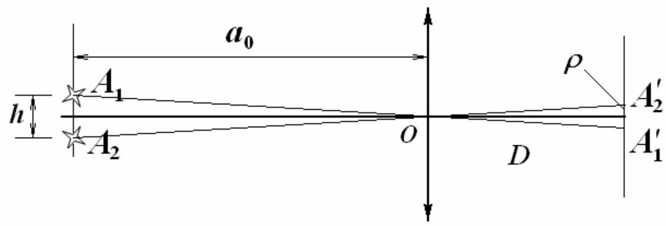
Поэтому

$$\Delta a_2 \approx 1{,}3\,мм. \qquad (11)$$



Часть 4. Разрешающая способность.

В этом случае расстояние между изображениями $A_1'A_2' \le \rho$ двух точек должно быть больше, чем среднее расстояние между рецепторами ρ. Положения изображений A_1' и A_2' проще всего найти, проведя лучи через оптический центр зрачка O. Из подобия треугольников находим минимальной расстояние



$$\frac{h}{a_0} = \frac{\rho}{D} \quad \Rightarrow \quad h = \rho\frac{a_0}{D} = 2{,}0\cdot 10^{-3}\,\frac{250}{24} \approx 2{,}1\cdot 10^{-2}\,мм. \qquad (11)$$