Задача 2 «Полукольцо»

Часть 1. Введение.

В этой части вам предлагается вспомнить некоторые формулы, касающиеся описания движения простых колебательных систем и динамики твердого тела.

Традиционный подход к расчету периодов гармонических колебаний механических систем заключается в приведении уравнения движения к стандартной форме. Пусть состояние системы полностью характеризуется одной координатой x (это может быть, например, декартовая координата материальной точки; угол поворота при вращательном движении). Скорость изменения этой координаты обозначим $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, а ее ускорение (скорость изменения скорости) $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$. Если на основании физических законов и уравнений удается получить уравнение

$$a = -\omega_0^2 x, \qquad (1)$$

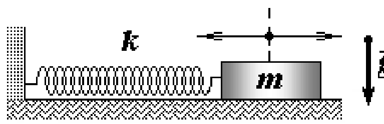
где ω_0^2 - положительная постоянная, то из этого уравнения однозначно следует, что величина $x(t)$ изменяется по гармоническому закону с круговой частотой ω_0. Заметим, что к уравнению (1) можно привести уравнения, основанные на втором законе Ньютона.

Эквивалентным способом расчета периодов колебаний является приведение физических уравнений к виду (которое часто называют **уравнением гармонических колебаний**)

$$v^2 + \omega_0^2 x = const, \qquad (2)$$

еще раз подчеркнем, что в этом уравнении обязательно $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$. Из уравнения (2) также однозначно следует, что величина $x(t)$ изменяется по гармоническому закону с круговой частотой ω_0. Как правило, к уравнению вида (2) приводятся уравнения, основанные на основе закона сохранения энергии.

1. Рассмотрите горизонтальные колебания пружинного маятника: представляющего собой груз массы m, прикрепленный с помощью легкой пружины жесткостью k к вертикальной стене. Считайте, что в начальный момент времени груз сместили на некоторое расстояние x_0 от его положения равновесия.

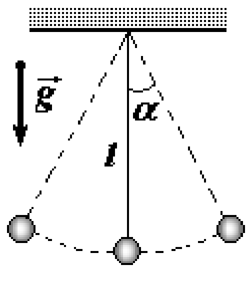


1.1 Пренебрегая трением, запишите уравнение закона сохранения механической энергии для груза.

1.2 Приведите полученное уравнение к виду (2). На основании его запишите формулу для периода колебаний груза.

Во многих случаях уравнение вида (2) не следует автоматически из уравнения закона сохранения энергии. Но при рассмотрении малых колебаний (когда величина x, и скорость ее изменения v малы) из уравнения закона сохранения энергии можно получить уравнение вида (2). Для этого следует упростить выражения для кинетической и потенциальной энергии, пренебрегая малыми величинами порядка выше второго (то есть $x^3, v^3, x^4, v^4, x^2 \cdot v^2$, и т.д.)

2. Рассмотрите малые колебания математического маятника, представляющего собой груз некоторой массы, подвешенный на легкой нерастяжимой нити длиной l в однородном поле тяжести земли. В качестве координаты используйте α - угол отклонения нити маятника от вертикали.



2.1 Пренебрегая сопротивлением воздуха, запишите уравнение закона сохранения механической энергии для груза (в качестве координаты используйте угол отклонения).

2.2 Считая угол отклонения α малым, приведите полученное уравнение к виду (2). На основании его запишите формулу для периода колебаний маятника.

Подсказка: при малых углах α справедлива приближенная формула

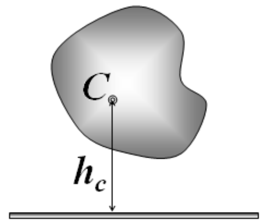
$$\cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}. \qquad (3)$$

При описании движения твердого тела, которое не может считаться материальной точкой, выражения для кинетической и потенциальной энергий тела усложняются.

3.1 Покажите, что потенциальная энергия твердого тела, находящегося в поле тяжести Земли определяется простой формулой

$$U = mgh_C, \qquad (3)$$

где h_C – высота центра масс тела, g – ускорение свободного падения.



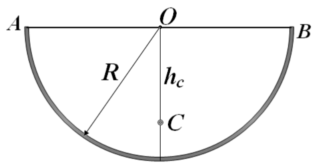
Часть 2. Колебания полукольца.

Из тонкостенной трубы радиуса R вырезали полукольцо. Его края соединили легкой проволокой AB. Изгибом проволоки и ее массой следует пренебрегать.

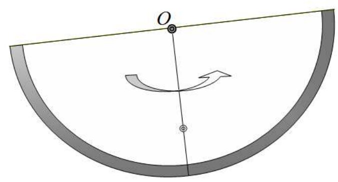
4.1 Покажите, что центр масс C полукольца находится на расстоянии

$$h_C = \frac{2}{\pi}R \qquad (5)$$

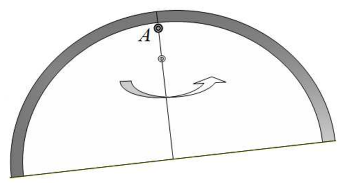
от его центра O.



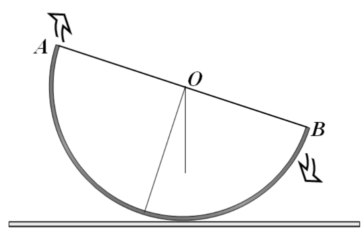
4.2 Полукольцо подвесили на горизонтальной оси, проходящей через точку O (центр полукольца). Определите период малых колебаний полукольца при таком подвесе.



4.3 Полукольцо подвесили на горизонтальной оси, проходящей через точку A (вершину полукольца), отклонили на малый угол от положения равновесия и отпустили. Определите период колебаний в этом случае.



4.4 Полукольцо поставили на шероховатую поверхность и вывели из положения равновесия. Полукольцо начало колебаться, качаясь по поверхности без проскальзывания. Определите период таких колебаний полукольца. Колебания считайте малыми.



Подсказка. Получите выражение для кинетической энергии кольца в момент времени, когда ось симметрии кольца вертикальна. При малых колебаниях это выражение будет справедливо и при малых отклонениях от вертикали.