Задача 2 «Полукольцо»

1.1 Закон сохранения механической энергии при движении груза по горизонтальной поверхности имеет вид

$$E = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{kx^2}{2}, \qquad (1)$$

где υ – значение мгновенной скорости движения груза, а x – значение абсолютной деформации пружины (смещение груза от положения равновесия).

1.2 Разделив обе части (1) на массу груза m, получим

$$\frac{\upsilon^2}{2} + \frac{k}{m} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{E}{m} = const. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что для горизонтального пружинного маятника

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Соответственно, период таких колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \qquad (3)$$

2.1 При рассмотрении математического маятника удобно ввести в качестве координаты угол α его отклонения от вертикали. Тогда кинетическая энергия движения материальной точки может быть представлена в виде

$$E^K = \frac{m\upsilon^2}{2} = \frac{m\omega^2 R^2}{2},$$

где ω — угловая скорость вращения математического маятника, а радиус окружности равен длине его подвеса $R = l$.

При отклонении маятника на угол α от вертикали его потенциальная энергия возрастет на величину

$$E^П = mgh = mgl(1 - \cos\alpha).$$

2.2 Используя приведенное в условии соотношение для малых колебаний математического маятника, получим

$$E^П = mgl\frac{\alpha^2}{2}.$$

Теперь уравнения закона сохранения энергии принимает вид

$$E = \frac{mR^2\omega^2}{2} + \frac{k\alpha^2}{2} = const, \qquad (4)$$

где $k = \dfrac{mg}{l}$.

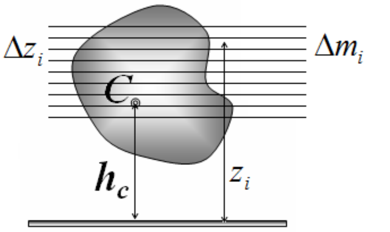
Преобразовывая выражение (4) к уравнению гармонических колебаний, получаем

$$\frac{\omega^2}{2} + \frac{k}{m} \cdot \frac{\alpha^2}{2} = \frac{E}{mR^2} = const.$$

Соответственно, для периода колебаний математического маятника получаем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (5)$$

3.1 Мысленно разобьем тело на тонкие горизонтальные слои толщиной Δz. Массу каждого слоя обозначим Δm_i, а его высоту z_i. Тогда потенциальная энергия всего тела может быть представлена в виде суммы



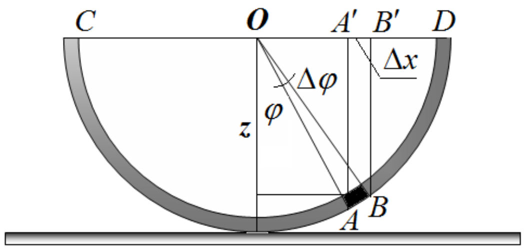
$$U = \sum_i \Delta m_i g z_i = g \sum_i \Delta m_i z_i \ .$$

Сумма стоящая в этом выражении определяет положение центра масс

$$\sum_i \Delta m_i z_i = m h_c \ .$$

Откуда и следует требуемое выражение для потенциальной энергии тела.

4.1 Мысленно разобьем кольцо на малые участки, видимые из центра кольца под малым углом $\Delta\varphi$. Рассмотрим на кольце малый участок AB, положение которого задается углом φ от вертикали. Длина этого участка кольца равна $\Delta l = |AB| = R\Delta\varphi$, а масса (учитывая, что вся масса m равномерно распределена в пределах угла $\varphi \in [-\pi/2, +\pi/2]$) $\Delta m = \dfrac{m}{\pi}\Delta\varphi$. Вертикальная координата (отсчитываемая от центра кольца O) выделенного участка равна $z = R\cos\varphi$.



Теперь можно записать выражение для определения координаты h_C центра масс кольца

$$m h_C = \sum_i \Delta m_i \, z_i \,, \qquad (6)$$

где суммирование ведется по всем элементам кольца. Подставим полученные выше выражения для параметров отдельных элементов кольца

$$m h_C = \sum_i \Delta m_i \, z_i = \sum_i \frac{m}{\pi}\Delta\varphi_i \cdot R\cos\varphi_i = \frac{m}{\pi}\sum_i \Delta\varphi_i \cdot R\cos\varphi_i = \frac{m}{\pi}\sum_i \Delta l_i \cos\varphi_i \,, \qquad (7)$$

Полученная сумма легко вычисляется, если обратить внимание, что $\Delta l_i \cos\varphi_i = |A'B'|$, то есть равна длине проекции выделенного отрезка на горизонтальное направление, сумма этих длин проекций равна длине отрезка CD, очевидно, равной диаметру кольца. Таким образом получаем

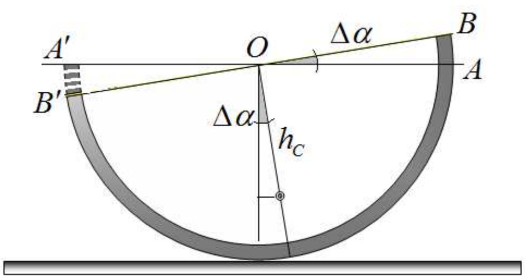
$$m h_C = \frac{m}{\pi}\sum_i \Delta l_i \cos\varphi_i = \frac{m}{\pi} \cdot 2R \,, \qquad (8)$$

Откуда и следует искомое выражение

$$h_C = \frac{2}{\pi} R \,, \qquad (9)$$

Альтернативный вариант 1.

Повернем полукольцо на малый угол $\Delta\alpha$. При этом его потенциальная энергия увеличится (за счет того, что отрезок $A'B'$ «переместился» в положение AB)



$$\Delta U = \Delta m g \cdot \Delta h = \frac{m}{\pi}\Delta\alpha \cdot R\Delta\alpha \qquad (1)$$

С другой стороны это же изменение

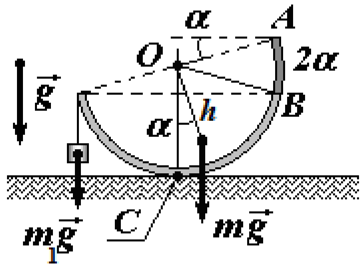
потенциальной энергии можно выразить через изменение высоты центра масс

$$\Delta U = mg\left(h_C - h_C\cos\Delta\alpha\right) \approx mgh_C\frac{(\Delta\alpha)^2}{2},$$

на последнем шаге использовалась приближенная формула для косинуса малого угла. Приравнивая полученные выражения для изменения потенциальной энергии, получим требуемую формулу для центра масс.

Альтернативный вариант 2.

Подвесим к краю полукольца груз малой массы m_1. Рассмотрим моменты сил, действующих на систему в состоянии равновесия, относительно оси, проходящей через точку касания полукольца и плоскости (точку *C*). При малом угле [1] α момент веса груза



$$M_1 = mgR\cos\alpha \approx mgR$$

Момент силы тяжести полукольца можно записать двумя способами: через смещение центра масс полукольца

$$M_2 = mgh_C\sin\alpha \approx mgh_C\alpha$$

или как момент веса некомпенсированной части *AB* полукольца

$$M_2 \approx \frac{2\alpha}{\pi}mgh_C$$

Приравнивая между собой выражения для M_2, найдем искомое расстояние r от точки *O* до центра масс полукольца.

Возможны и другие варианты решения.

4.2 При колебаниях полукольца вокруг его центра *O* все его точки движутся с одинаковыми скоростями $v = \omega R$, где $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ - угловая скорость вращения кольца, α - угол отклонения в данный момент времени. Поэтому кинетическая энергия кольца выражается формулой

$$E^K = \frac{m\omega^2R^2}{2} \qquad (10)$$

Изменение потенциальной энергии кольца при отклонении на малый угол α равно

$$\Delta U = mgh_C\left(1-\cos\alpha\right) \approx mgh_C\frac{\alpha^2}{2}. \qquad (11)$$

Используя формулы (10)-(11), запишем уравнения закона сохранения механической энергии

$$\frac{m\omega^2R^2}{2} + mgh_C\frac{\alpha^2}{2} = E = const \qquad (12)$$

из которого следует уравнение гармонических колебаний

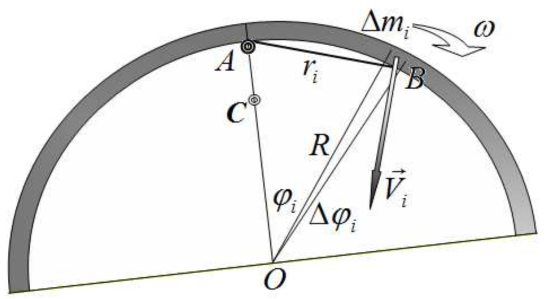
$$\omega^2 + \frac{gh_C}{R^2}\alpha^2 = const, \qquad (13)$$

Период которых равен

[1] При малом угле ($\alpha \to 0$) с одинаковой точностью справедливы равенства $\sin\alpha \approx \alpha;\ \cos\alpha \approx 1$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R^2}{gh_C}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2}{g\frac{2}{\pi}R}} = 2\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{R}{g}}\ . \tag{14}$$

Возможны и другие варианты решения (например, используя формулу для колебаний физического маятника и выражение для момента инерции полукольца).



4.3 В этом случае разные части полукольца будут иметь разные линейные скорости, но одинаковую угловую скорость $\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$ (α - угол отклонения в данный момент времени). Поэтому для вычисления кинетической энергии необходимо его разбивать на малые участки. Рассмотрим один из таких участков, видимый из центра под малым углом $\Delta\varphi$, и отстоящий от оси симметрии полукольца на угол φ. Модуль его линейной скорости равен $V_i = \omega r_i$, где r_i - расстояние от выделенного участка кольца до оси вращения BA. Квадрат этого расстояния можно выразить по теореме косинусов для треугольника OAB

$$r_i^2 = 2R^2(1 - \cos\varphi_i). \tag{15}$$

Подсчитаем кинетическую энергию кольца, как сумму энергий всех его малых частей

$$E^K = \sum_i \frac{\Delta m_i V_i^2}{2} = \sum_i \frac{1}{2}\frac{m}{\pi}\Delta\varphi_i \cdot (r_i\omega)^2 = \frac{m\omega^2}{2\pi}\sum_i 2R^2(1-\cos\varphi_i)\Delta\varphi_i = $$
$$= \frac{m\omega^2}{\pi}\left(R^2\sum_i \Delta\varphi_i - R\sum_i R\cos\varphi_i\Delta\varphi_i\right).$$

Первая сумма в этом выражении равна π, вторую мы вычисляли при расчете положения центра масс, она равна $2R$. Поэтому выражение для кинетической энергии полукольца имеет вид

$$E^K = \frac{m\omega^2}{\pi}\left(R^2\sum_i \Delta\varphi_i + R\sum_i R\cos\varphi_i\Delta\varphi_i\right) = \frac{m\omega^2 R^2}{\pi}(\pi - 2) = m\omega^2 R^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) \tag{16}$$

Не сложно получить и выражение для потенциальной энергии кольца при его отклонении на малый угол α. Для этого достаточно в формуле (11) заменить h_C на расстояние от оси вращения до центра масс в этом «перевернутом» случае ($h_C \to R - h_C$

$$\Delta U = mg(R - h_C)(1 - \cos\alpha) \approx mg(R - h_C)\frac{\alpha^2}{2} = mgR\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{\alpha^2}{2}. \tag{17}$$

Теперь мы можем записать уравнение закона сохранения энергии при движении кольца

$$m\omega^2 R^2\left(1 - \frac{2}{\pi}\right) + mgR\left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{\alpha^2}{2} = E \tag{18}$$

и привести его к виду уравнения гармонических колебаний

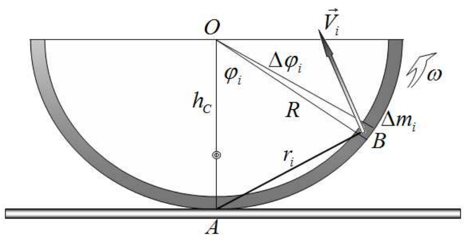
$$\omega^2 + \frac{g}{2R}\alpha^2 = const\ . \tag{19}$$

Из этого уравнения определяем период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{2\frac{R}{g}}\ . \qquad (20)$$

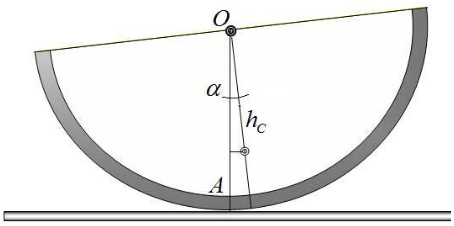
Возможны и другие варианты решения (например, используя формулу для колебаний физического маятника и выражение для момента инерции полукольца).

4.4 Расчет кинетической энергии в данном случае ничем не отличается от проведенного в предыдущем разделе 4.3, потому, что в указанном в подсказке положении мгновенным центром вращения является вершина полукольца. Поэтому можно воспользоваться формулой (16).



$$E^K = m\omega^2 R^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right) \qquad (21)$$

А для определения изменения потенциальной энергии можно воспользоваться соответствующей формулой (11) из пункта 4.2, потому, что в обоих случаях высота центра полукольца остается неизменной, поэтому



$$\Delta U = mgh_C\frac{\alpha^2}{2} = mgR\frac{2}{\pi}\frac{\alpha^2}{2} = mgR\frac{\alpha^2}{\pi}\ . \qquad (22)$$

Дальнейший путь решения уже изъезжен нами. Записываем закон сохранения энергии

$$m\omega^2 R^2\left(1-\frac{2}{\pi}\right) + mgR\frac{\alpha^2}{\pi} = E\ , \qquad (23)$$

приводим его к виду уравнения гармонических колебаний

$$\omega^2 + \frac{g}{(\pi-2)R}\alpha^2 = const\ , \qquad (24)$$

Записываем формулу для периода колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{(\pi-2)\frac{R}{g}}\ . \qquad (25)$$

Возможны и другие варианты решения (например, используя формулу для колебаний физического маятника и выражение для момента инерции полукольца).

Задача 3. «Электрический дрейф»

Часть 0.

0.1 Радиус окружности:

$$R = \frac{mv_0}{qB} \qquad (1)$$

0.2 Угловая скорость вращения:

$$\omega = \frac{v_0}{R} = \frac{qB}{m} \qquad (2).$$

0.3 Период вращения: