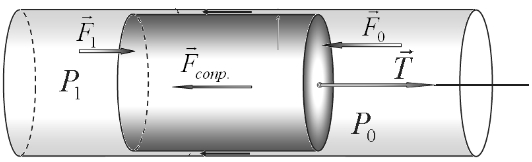
Задача 2. «Просачивание»

1. **Неподвижный цилиндр.**



Сумма сил, действующих на цилиндр равна нулю, так как он покоится, поэтому

$$\Delta P \cdot \pi R^2 + F_{сопр.} = T\ , \tag{1}$$

здесь $\Delta P \cdot \pi R^2 = F_0 - F_1$ - разность сил давления жидкости на торцы цилиндра;

$$F_{сопр.} = \gamma \frac{v}{h} \cdot 2\pi R l \tag{2}$$

- сила вязкого трения, действующая со стороны движущейся жидкости на боковую поверхность цилиндра.

Жидкость в зазоре движется с постоянной скоростью, поэтому сумма сил, действующих на нее также равна нулю, поэтому можно записать

$$\Delta P \cdot 2\pi R h = 2F_{сопр.} \tag{3}$$

Здесь и далее, мы учитываем малость толщины зазора, поэтому его площадь поперечного сечения может быть записана в виде (если пренебречь малой величиной h^2)

$$s = \pi (R+h)^2 - \pi R^2 \approx 2\pi R h\,. \tag{4}$$

При записи уравнения (3) также следует учесть, что на жидкость действуют силы вязкого трения, как со стороны боковой поверхности цилиндра, так и со стороны внутренней поверхности трубки, причем различием в их площадях можно пренебречь.

Из уравнений (1), (3) находим

$$\begin{gathered} F_{сопр.} = \pi R h \cdot \Delta P \\ T = \pi R^2 \Delta P \left(1 + \frac{h}{R}\right). \end{gathered} \tag{5}$$

Как следует из последней формулы, сила натяжения нити превышает разность сил давления на величину силы вязкого трения, действующей на боковую поверхность цилиндра.

Приравнивая силу трения к ее выражению через среднюю скорость течения воды в зазоре

$$\pi R h \cdot \Delta P = \gamma \frac{v}{h} \cdot 2\pi R l\,, \tag{6}$$

находим

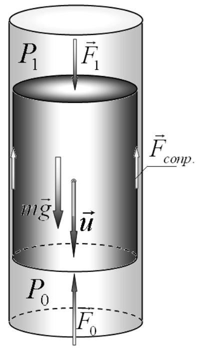
$$v = \frac{h^2}{2\gamma l} \Delta P\,. \tag{7}$$

Расход жидкости равен средней скорости, умноженной на площадь поперечного сечения потока

$$q = 2\pi R h \cdot v = \frac{\pi R h^3}{\gamma l} \Delta P\,. \tag{8}$$

Обратите внимание на сильную зависимость расхода жидкости от толщины зазора, например, при уменьшении толщины зазора в 2 раза расход уменьшается в 8 раз!

2. **«Тонем и всплываем!»**



Данная часть задачи отличается от предыдущей, тем, что необходимо учитывать действие силы тяжести, как на цилиндр, так и на движущуюся жидкость. Так как на жидкость в зазоре и на цилиндр действуют тормозящие силы, зависящие от скоростей движения. По-прежнему, векторная сумма сил, действующих на цилиндр, равна нулю, поэтому

$$mg - \pi R^2 \Delta P - F_{сопр.} = 0 . \qquad (9)$$

Запишем также выражение для массы цилиндра

$$m = \pi R^2 l \rho_1 . \qquad (10)$$

Второе уравнение выражает условие постоянства скорости жидкости в зазоре (то есть сумма сил, действующих на нее равна нулю):

$$2\pi Rh\Delta P - 2\pi Rhl\rho_0 g - 2F_{сопр.} = 0 \ , \qquad (11)$$

где второе слагаемое есть сила тяжести, действующая на жидкость.
Из уравнения (9) выразим силу сопротивления (с учетом выражения для массы цилиндра (10)) и подставим ее в уравнение (11)

$$2\pi Rh\Delta P - 2\pi Rhl\rho_0 g - 2\left(\pi R^2 l\rho_1 g - \pi R^2 \Delta P\right) = 0 .$$

Из этого уравнения выражаем значения разности давлений

$$\Delta P = \frac{\rho_1 gl + \frac{h}{R}\rho_0 gl}{1 + \frac{h}{R}} \qquad (12)$$

Полученное выражение принципиально отличается от формулы для гидростатического давления столба жидкости в зазоре $(\Delta P)_{статическое} = \rho_0 gl$. Разность сил давлений (см. (9)) равна силе тяжести цилиндра уменьшенной на силу вязкого трения. Иными словами, формулы гидростатики не применимы при движении жидкости. Основные условия гидростатики – условия равновесия, а в данном случае главное – условия установившегося движения жидкости (и цилиндра). При движении тела в жидкости происходит такое перераспределение давлений, которое и обеспечивает условия стационарности потоков.

Эту идею можно развить и далее - формула для гидростатической силы Архимеда также «не работает» в данном случае. Сумма сил давлений жидкости на цилиндр равна весу цилиндра (минус сила сопротивления), а не весу жидкости вытесненной цилиндром!
Формально, разность между полученным выражением (12) и гидростатическим давлением выражается формулой

$$\frac{\rho_1 gl + \frac{h}{R}\rho_0 gl}{1 + \frac{h}{R}} - \rho_0 gl = \frac{\rho_1 gl + \rho_0 gl}{1 + \frac{h}{R}} \approx (\rho_1 - \rho_0) gl . \qquad (13)$$

Найдем из уравнения (9) силу сопротивления, действующую на поверхность диска

$$F_{сопр.} = \pi R^2 l\rho_1 g - \pi R^2 \Delta P = \pi R^2 \frac{\frac{h}{R}\rho_1 gl - \frac{h}{R}\rho_0 gl}{1 + \frac{h}{R}} \approx \pi R^2 \frac{h}{R}(\rho_1 - \rho_0) gl . \qquad (14)$$

С другой стороны эта же сила выражается через среднюю скорость жидкости

$$F_{сопр.} = 2\pi Rl\gamma \frac{v}{h} . \qquad (15)$$

Скорость течения жидкости в зазоре связана со скоростью движения цилиндра условием постоянства объема жидкости (объем жидкости вытесненной цилиндром равен объему жидкости, протекающей в зазоре):

$$2\pi Rhv = \pi R^2 u \,. \tag{16}$$

Из этого уравнения легко найти среднюю скорость движения жидкости в зазоре

$$v = \frac{R}{2h} u \,. \tag{17}$$

Отметим, что скорость течения жидкости значительно превышает скорость движения цилиндра (из $R >> h \quad \Rightarrow \quad v >> u$), что оправдывает сделанное в условие о практической независимости силы сопротивления от скорости движения цилиндра)

Теперь решим систему уравнений (14)-(16). Находим

$$2\pi Rhv = \pi R^2 u \quad \Rightarrow 2\pi Rv = \frac{\pi R^2}{h} u;$$

$$F_{сопр.} = 2\pi Rl\gamma \frac{v}{h} = \frac{\pi R^2 l}{h^2} \gamma u \,.$$

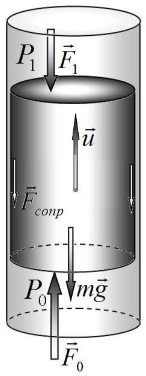
Наконец из равенства

$$\frac{\pi R^2 l}{h^2} u = \pi R^2 \frac{h}{R} (\rho_1 - \rho_0) gl$$

определяем

$$u = \frac{h^3}{\gamma R} (\rho_1 - \rho_0) g \,. \tag{17}$$

Решение задачи при всплывании цилиндра аналогично.



Суммарная сила, действующая на цилиндр, равна нулю:

$$\begin{gathered} mg - \pi R^2 \Delta P + F_{сопр.} = 0 \\ \pi R^2 l \rho_1 g - \pi R^2 \Delta P + F_{сопр.} = 0 \end{gathered} \,. \tag{18}$$

Суммарная сила, действующая на жидкость в зазоре, равна нулю

$$2\pi Rh\Delta P - 2\pi Rhl\rho_0 g + 2F_{сопр.} = 0 \,, \tag{19}$$

Исключая из этих уравнений силу сопротивления, находим разность давлений

$$\Delta P = \frac{\rho_1 gl + \frac{h}{R}\rho_0 gl}{1 + \frac{h}{R}} \,. \tag{20}$$

Скорость опускания цилиндра находим, выражая силу сопротивления через среднюю скорость жидкости в зазоре и уравнение неразрывности. Опуская промежуточные выкладки, получаем

$$u = \frac{h^3}{\gamma R} (\rho_0 - \rho_1) g \,. \tag{21}$$