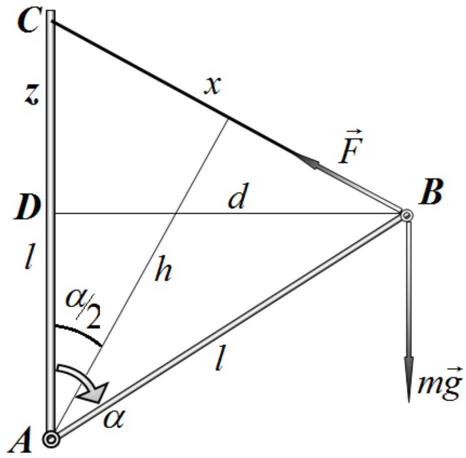
Задача 10-1 «Фонарь»

Часть 1.



Условие равновесия удобно записать, приравнивая модули моментов силы тяжести[1] $m\vec{g}$ и силы упругости жгута $\vec{F}$, относительно шарнирного крепления

$$mgl\sin\alpha = Fl\cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (1)$$

Длина растянутого жгута равна

$$x = 2l\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

При выполнении закона Гука и пренебрежимо малой начальной длине жгута сила упругости выражается формулой

$$F = kx = 2kl\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (3)$$

Таким образом, уравнения равновесия имеет вид

$$mgl\sin\alpha = 2kl\sin\frac{\alpha}{2}\cdot l\cos\frac{\alpha}{2}. \qquad (4)$$

Если воспользоваться тригонометрической формулой и сократить $\sin\alpha$, то получается приведенное условие

$$mg = kl. \qquad (5)$$

Для определения коэффициента жесткости следует воспользоваться результатами измерений длины жгута при известной массе подвешенного груза.

$$m_0 g = kx_1 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{m_0 g}{x_1}. \qquad (6)$$

Подстановка этого значения в условие (5) дает

$$m_0 g = \frac{m_0 g}{x_1} l \quad \Rightarrow \quad l = x_1 \quad (?) \qquad (7)$$

что случайно выполняется в данном случае!

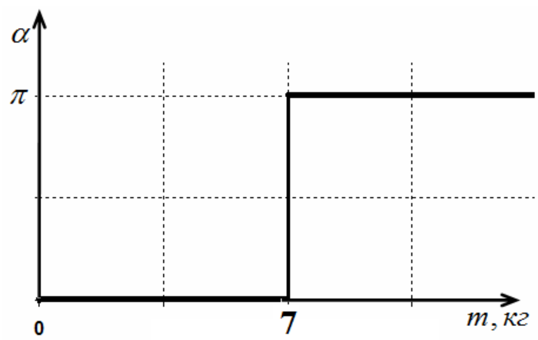
Однако уравнение (4) имеет корни, (которые оказались потерянными при сокращении)

$$\sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^* = 0, \quad \alpha^* = \pi\ . \qquad (8)$$

При $mg < kl$ устойчивым будет корень $\alpha^* = 0$, при $mg > kl$ устойчивым будет корень $\alpha^* = \pi$. Критическое значение массы, при котором произойдет опрокидывание находится из исходных данных

$$m^* g = kl = \frac{m_0 g}{x_1} l \quad \Rightarrow$$
$$m^* = m_0 \frac{l}{x_1} = 7{,}0 кг \qquad (9)$$

Требуемый график имеет вид, показанный на рисунке.



[1] Здесь мы записываем условия равновесия для произвольной массы подвешенного груза

Часть 2.

Уравнение равновесия в данном случае будет иметь вид

$$mg \cdot l\sin\alpha = k\left(x - x_0\right) \cdot l\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{10}$$

Используя приведенную в условии тригонометрическую формулу, получим

$$mg \cdot 2l\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = k\left(x - x_0\right) \cdot l\cos\frac{\alpha}{2},$$

Наконец, учтем, что $2l\sin\frac{\alpha}{2} = x$, тогда окончательно получим уравнение равновесия

$$mgx\cos\frac{\alpha}{2} = k\left(x - x_0\right) \cdot l\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{11}$$

Это уравнение имеет корень, соответствующий условию

$$\cos\frac{\alpha}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pi \quad \left(x = 2l\right). \tag{12}$$

Второй корень находится из уравнения

$$mgx = kl\left(x - x_0\right) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{x_0}{1 - \dfrac{mg}{kl}} = \frac{x_0}{1 - \dfrac{m\left(x_1 - x_0\right)}{m_0 l}}, \tag{11}$$

При выводе использовано выражение для жесткости жгута

$$m_0 g = k\left(x_1 - x_0\right) \quad \Rightarrow \quad k = \frac{m_0 g}{x_1 - x_0}. \tag{12}$$

Для анализа устойчивости найденных точек равновесия можно рассмотреть зависимость потенциальной энергии системы от длины шнура.

Потенциальная энергия системы включает:

- потенциальную энергию растянутого жгута $U_1 = \frac{k\left(x - x_0\right)^2}{2}$;
- потенциальную энергию подвешенного груза (относительно верхней точки крепления *C*) $U_2 = -mgz$.

Из теоремы Пифагора для треугольников ΔABD и ΔBCD следует

$$\begin{cases} d^2 = x^2 - z^2 \\ d^2 = l^2 - \left(l - z\right)^2 = 2lz - z^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z = \frac{x^2}{2l} \tag{13}$$

Таким образом, выражение для полной потенциальной энергии приобретает вид

$$U = \frac{k\left(x - x_0\right)^2}{2} - mg\frac{x^2}{2l} = \frac{k}{2}\left(\left(x - x_0\right)^2 - \frac{mg}{kl}x^2\right) = \frac{k}{2}\left(\left(1 - \frac{mg}{kl}\right)x^2 - 2xx_0 + x_0^2\right). \tag{14}$$

График этой зависимости есть парабола, с вершиной в точке

$x = \dfrac{x_0}{1 - \dfrac{mg}{kl}}$, что соответствует второму корню (11) уравнения равновесия.

При $mg < kl$ ветви этой параболы направлены вверх, поэтому положение равновесия (11) является устойчивым, при больших массах $mg > kl$ это положение становится неустойчивым, устойчивым становится решение $x = 2l$.

Максимальное значение массы можно найти, положив в формуле (11) $x = 2l$:

$$\frac{x_0}{1-\frac{m(x_1-x_0)}{m_0 l}} = 2l \quad \Rightarrow \quad 2l - 2\frac{m(x_1-x_0)}{m_0} = x_0 \quad \Rightarrow$$

$$m = m_0 \frac{2l - x_0}{2(x_1-x_0)} \approx 8{,}4 кг \tag{15}$$

Часть 3.

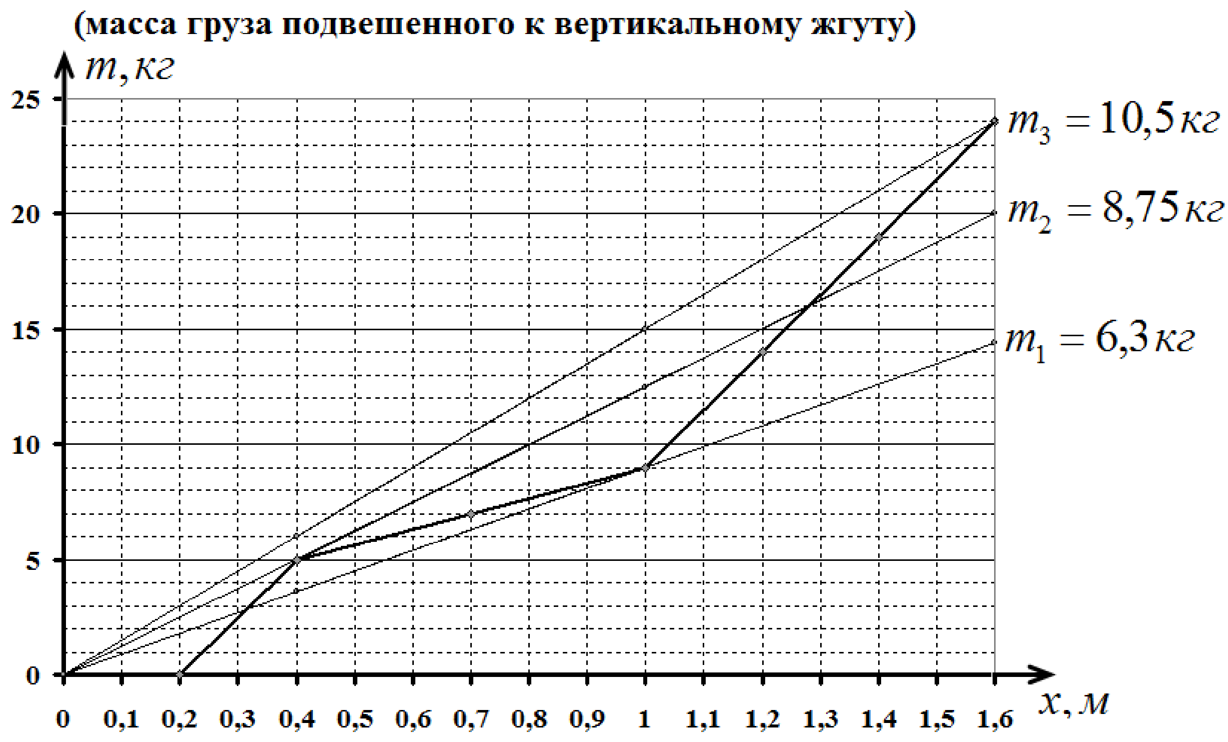
Запишем еще раз условие равновесия трубки:

$$mgl\sin\alpha = Fl\cos\frac{\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad mg\cdot 2l\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = Fl\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{16}$$

После сокращения на косинус половинного угла (не забывая о потерянном при этом корне), получим уравнение для определения x

$$\frac{mg}{l}x = F(x). \tag{16}$$

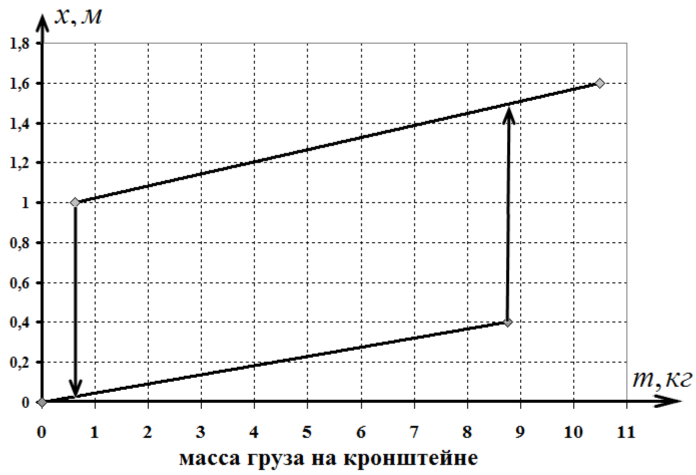
Это уравнение можно решить графически (можно и аналитически), для этого необходимо построить график зависимости величины $\frac{1}{g}F(x)$, для этого достаточно «перевернуть» график зависимости длины шнура от массы подвешенного груза, приведенный в условии задачи. Затем на этом графике следует провести семейство прямых $f(x) = \frac{m}{l}x$ и найти точку их пресечения. Такие построения показаны на рисунке.



При массах груза, подвешенного кронштейну, меньших $m_1 = 6{,}3 кг$ имеется одно положение равновесия. Длина шнура в этом случае линейно изменяется от нуля до 0, 4 м.

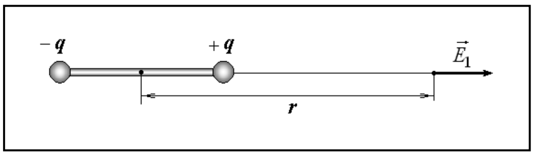
Пи массах больших $m_2 = 8{,}75 кг$ также имеется одно положения равновесия. В этом интервале длина шнура линейно изменяется от 1 м до 24 м (когда масса груза достигает $m_3 = 10{,}5 кг$).

В диапазоне масс от $m_1 = 6{,}3\,кг$ до $m_2 = 8{,}75\,кг$ есть три положения равновесия, центральное из которых является неустойчивым. Поэтому в этой области система обладает бистабильностью. Какое из возможных положений равновесия установится зависит от предыдущих состояний, следовательно, при увеличении нагрузки и последующем ее уменьшении будет наблюдаться петля гистерезиса (см. рис).



Задача 10. 2. До какой же степени..?

1. Напряженность электростатического поля E_1, создаваемого диполем на больших расстояниях $r\,(r >> l)$ вдоль линии, соединяющей заряды, найдем по принципу суперпозиции полей. Для этого следует построить векторную сумму напряженностей, создаваемых в точке наблюдения положительным $\vec{E}_+$ и отрицательным $\vec{E}_-$ зарядами диполя



$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- .$$

Поскольку векторы $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ на этой прямой противоположны друг другу, то модуль их суммы

$$E_1 = E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}\right). \qquad (1)$$

Используя формулы приближенных вычислений $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha\cdot x$ при малых x, получим

$$\frac{1}{\left(r \mp \frac{l}{2}\right)^2} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{(1\mp\frac{l}{2r})^2} = \begin{Bmatrix}\alpha = -2 \\ x = \frac{l}{2r}\end{Bmatrix} = \frac{1}{r^2}(1 \pm \frac{l}{r}) . \qquad (2)$$

С учетом (2) выражение (1) примет вид

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}(1+\frac{l}{r}) - \frac{1}{r^2}(1-\frac{l}{r})\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2l}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2p}{r^3} . \qquad (3)$$

Подставляя в (3) выражение для дипольного момента $p = ql$ системы, окончательно получаем