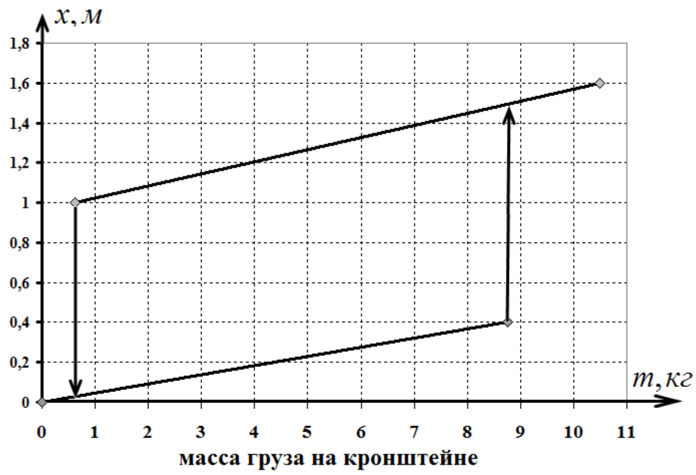
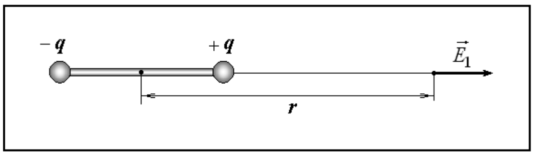
В диапазоне масс от $m_1 = 6{,}3\,кг$ до $m_2 = 8{,}75\,кг$ есть три положения равновесия, центральное из которых является неустойчивым. Поэтому в этой области система обладает бистабильностью. Какое из возможных положений равновесия установится зависит от предыдущих состояний, следовательно, при увеличении нагрузки и последующем ее уменьшении будет наблюдаться петля гистерезиса (см. рис).



Задача 10. 2. До какой же степени..?

1. Напряженность электростатического поля E_1, создаваемого диполем на больших расстояниях $r\,(r >> l)$ вдоль линии, соединяющей заряды, найдем по принципу суперпозиции полей. Для этого следует построить векторную сумму напряженностей, создаваемых в точке наблюдения положительным $\vec{E}_+$ и отрицательным $\vec{E}_-$ зарядами диполя



$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- .$$

Поскольку векторы $\vec{E}_+$ и $\vec{E}_-$ на этой прямой противоположны друг другу, то модуль их суммы

$$E_1 = E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(r-\frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r+\frac{l}{2}\right)^2}\right). \quad (1)$$

Используя формулы приближенных вычислений $(1+x)^\alpha \approx 1+\alpha\cdot x$ при малых x, получим

$$\frac{1}{\left(r\mp\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{(1\mp\frac{l}{2r})^2} = \left\{\begin{matrix}\alpha=-2\\ x=\frac{l}{2r}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{r^2}(1\pm\frac{l}{r}). \quad (2)$$

С учетом (2) выражение (1) примет вид

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}(1+\frac{l}{r}) - \frac{1}{r^2}(1-\frac{l}{r})\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2l}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2p}{r^3}. \quad (3)$$

Подставляя в (3) выражение для дипольного момента $p = ql$ системы, окончательно получаем

$$E_1(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}. \qquad (4)$$

С учетом направления вектора дипольного момента $\vec{p}$ системы (4) можно переписать в векторном виде (в решении не требуется)

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{p}}{r^3}.$$

Таким образом, как следует из (4), модуль напряженности поля E_1, создаваемого диполем вдоль его оси на больших расстояниях ($r >> l$) убывает обратно пропорционально кубу расстояния r до диполя

$$E_1 \sim \frac{1}{r^3}. \qquad (5)$$

Заметим, что выражение (4) можно получить и традиционным способом, без использования приведенного в условии приближенного равенства. Действительно, приняв обозначения

$$r_1 = r - \frac{l}{2}, \quad r_2 = r + \frac{l}{2}$$

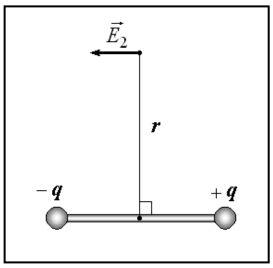
перепишем (1) в виде

$$E_1 = E_+ - E_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2 r_1^2}.$$

С учетом того, что $r_2^2 - r_1^2 = 2rl$, и в рамках принятых приближений можно считать, что $r_2^2 \cdot r_1^2 \approx r^4$, получим

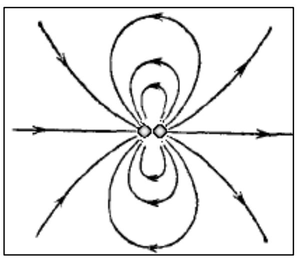
$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2rl}{r^4} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{2p}{r^3}.$$

Интересно, что зависимость, подобная (5), сохраняется и при нахождении напряженности поля E_2 «перпендикулярно» диполю, т.е. на прямой, перпендикулярной оси диполя и проходящей через его центр. В этом случае изменяется только безразмерный коэффициент



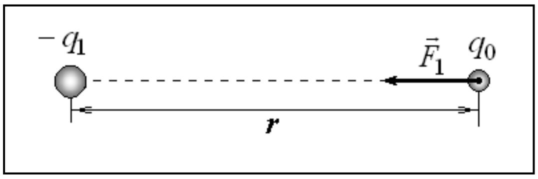
$$E_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}.$$

Общая картина силовых линий диполя на большом расстоянии от него дана на рисунке справа. Расположение положительного и отрицательного зарядов диполя соответствует расположению, приведенному в условии задачи.



2. Согласно закону Кулона пробный заряд q_0 (он является положительным точечным зарядом) будет притягиваться к точечному заряду $-q_1$ в вакууме с силой

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_0 q_1}{r^2}. \qquad (6)$$



Согласно третьему закону Ньютона с такой же по модулю силой F_1 заряд $-q_1$ будет притягиваться к заряду q_0.

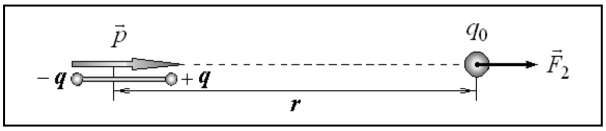
Следовательно, в данном случае справедливо утверждение

$$F_1 \sim \frac{1}{r^2}.$$

Таким образом, в данном пункте задачи

$$n = 2. \qquad (7)$$

3. При взаимном расположении диполя $\vec{p}$ и пробного заряда q_0 как на рисунке взаимодействие будет носить характер отталкивания, поскольку одноименный (положительный) заряд диполя находится ближе к пробному (положительному) заряду, чем разноименный (отрицательный). В таком случае силы отталкивания преобладают над силами притяжения, что приводит к возникновению результирующей силы $\vec{F}_2$, направленной вправо (см. рис).



Следовательно, в данном случае диполь будет отталкивать пробный заряд вдоль своей оси с силой

$$F_2 = q_0 E_1(r) = \{(4)\} = \frac{q_0}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}. \qquad (8)$$

Заметим, что при изменении ориентации диполя ($-\vec{p}$), характер взаимодействия диполя с пробным зарядом изменится с отталкивания на притяжение.

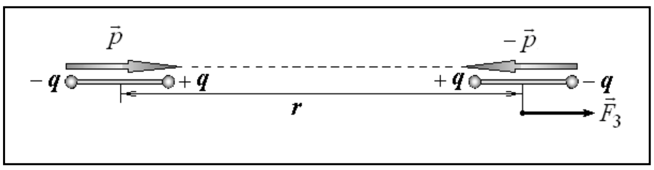
Следовательно, в данном случае справедливо утверждение

$$F_2 \sim \frac{1}{r^3}.$$

Таким образом, в данном пункте задачи

$$n = 3. \qquad (9)$$

4. Для определенности будем считать, что левый диполь $\vec{p}$ создает напряженность поля в пространстве, которое действует на правый диполь $-\vec{p}$.



Поскольку одноименные заряды диполей находятся на меньших расстояниях, чем разноименные, то согласно закону Кулона сила отталкивания в системе будет больше силы притяжения.

Это приведет к возникновению результирующей силы $\vec{F}_3$ отталкивания между диполями, направленной вправо (см. рис.).

Используя (4), для рассматриваемой системы можем записать

$$F_3 = q\left(E_1(r-\frac{l}{2}) - E_1(r+\frac{l}{2})\right) = \frac{q\,p}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{(r-\frac{l}{2})^3} - \frac{1}{(r+\frac{l}{2})^3}\right). \qquad (10)$$

С помощью формулы приближенного вычисления $(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha \cdot x$ (при $x \to 0$) в данном случае находим

$$\frac{1}{\left(r \mp \frac{l}{2}\right)^3} = \frac{1}{r^3}\cdot\frac{1}{(1\mp\frac{l}{2r})^3} = \left\{\begin{matrix}\alpha = -3 \\ x = \frac{l}{2r}\end{matrix}\right\} = \frac{1}{r^3}(1\pm\frac{3}{2}\frac{l}{r}).$$

Соответственно, разность в выражении (10) примет вид

$$\frac{1}{(r-\frac{l}{2})^3} - \frac{1}{(r+\frac{l}{2})^3} \approx \frac{3l}{r^4}.$$

С учетом того, что $p = ql$, окончательно получим

$$F_3 = \frac{3p^2}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^4}. \qquad (11)$$

Следовательно, в данном случае справедливо утверждение

$$F_3 \sim \frac{1}{r^4}.$$

Таким образом, в данном пункте задачи

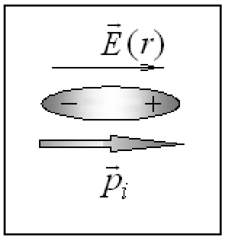
$$n = 4. \qquad (12)$$

Заметим, что выражение (11) проще получить, используя производную от (4) по расстоянию r, *поскольку искомая сила* F_3 *вычисляется как*

$$F_3 = -p\frac{\partial E}{\partial r},$$

однако подобный подход выходит за рамки действующей школьной программы.

5. Будем считать, что напряженность $E(r)$ электростатического поля, создаваемого точечным зарядом q_0 в области нахождения молекулы, меняется незначительно (в силу малости размеров молекулы) и равна



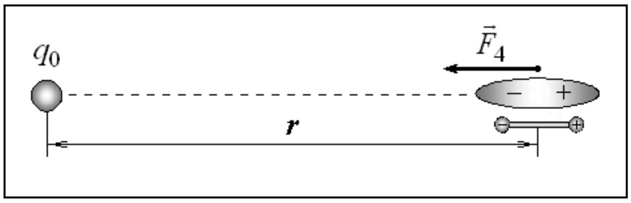
$$E(r)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_0}{r^2}.$$

Тогда индуцированный дипольный момент молекулы примет значение

$$p_i=\alpha\varepsilon_0 E(r)=\alpha\varepsilon_0\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_0}{r^2}=\frac{\alpha}{4\pi}\cdot\frac{q_0}{r^2}.$$

В пункте 3 задачи мы вычислили силу взаимодействия диполя и точечного заряда, правда в рассматриваемом случае индуцированный (наведенный) дипольный момент $\vec{p}_i$ имеет противоположное направление («от заряда»), что приведет к возникновению в данной системе силы притяжения.

Используя (8) и третий закон Ньютона, найдем силу притяжения вынужденно поляризованной молекулы к точечному заряду



$$F_4=\frac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p_i}{r^3}=\frac{q_0}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^3}\cdot\frac{\alpha}{4\pi}\frac{q_0}{r^2}=\frac{\alpha q_0^2}{8\pi^2\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^5} \qquad (13)$$

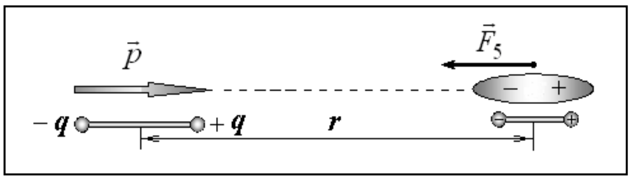
Следовательно, в данном случае справедливо утверждение

$$F_4\sim\frac{1}{r^5}.$$

Таким образом, в данном пункте задачи

$$n=5. \qquad (14)$$

6. Будем считать, что напряженность электростатического поля, создаваемого диполем $\vec{p}$ в области нахождения молекулы, меняется незначительно. Тогда согласно (4) можем записать



$$E(r)=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p}{r^3}.$$

Соответственно, индуцированный дипольный момент молекулы в этом случае примет значение

$$p_i=\alpha\varepsilon_0\cdot\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{p}{r^3}=\frac{\alpha}{2\pi}\cdot\frac{p}{r^3}. \qquad (15)$$

В пункте 4 задачи мы вычислили силу отталкивания между диполями, ориентированными «навстречу» друг другу. В данном случае диполи ориентированы в одном направлении, поскольку наведенный дипольный момент всегда ориентирован «по полю». Это обстоятельство приведет к возникновению силы притяжения между диполями в рассматриваемой системе.

Считая взаимодействие диполей по формуле (11), получим величину силы притяжения между ними для рассматриваемого случая

$$F_5 = \frac{3p \cdot p_i}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^4} = \frac{3p}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\alpha}{2\pi} \cdot \frac{p}{r^3} \cdot \frac{1}{r^4} = \frac{3\alpha p^2}{4\pi^2 \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r^7} . \qquad (16)$$

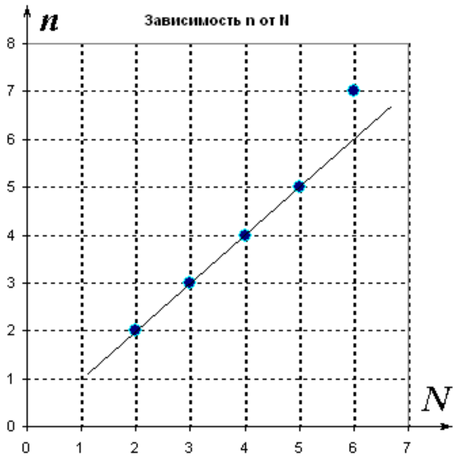
Следовательно, в данном случае справедливо утверждение

$$F_5 \sim \frac{1}{r^7} .$$

Таким образом, в данном пункте задачи

$$n = 7 . \qquad (17)$$

Интересно, что в пунктах 3 и 4 задачи имеет место сила отталкивания между объектами, а в пунктах 5 и 6, связанных с индуцированным дипольным моментом, всегда имеет место сила притяжения.



Это связано с тем, что направление напряженности внешнего электрического поля однозначно определяет направление возникающего дипольного момента $\vec{p}$ поляризуемого объекта — он всегда ориентирован «по силовой линии» внешнего (индуцирующего) поля.

В завершение задачи на рисунке справа приведена достаточно забавная (но верная!) зависимость показателя степени n в выражении для силы взаимодействия F_i от номера N пункта задачи.

Как говорится, комментарии излишни, но так и не понятно, почему последняя точка не ложится «на прямую». Было бы так красиво…