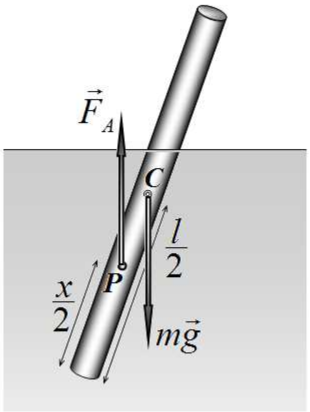
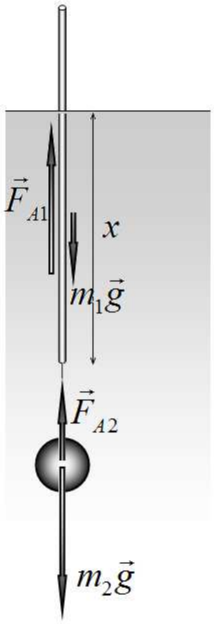
Задача 11-1. Поплавок



1. Сила тяжести, приложена к центру масс стержня C, который находится в его середине на расстоянии $\frac{l}{2}$ от его конца. Сила Архимеда приложена к центру масс вытесненной воды точке P, которая находится на расстоянии $\frac{x}{2}$ от его конца (x - глубина погруженной части стержня). Так как поплавок плавает, то $x < l$, поэтому точка приложения силы тяжести находится выше точке приложения силы Архимеда. Поэтому вертикальное положение стержня неустойчиво – при малейшем случайном отклонении от вертикали возникает момент сил, стремящийся опрокинуть поплавок (см. рис.)



2-4. На поплавок действуют:

- сила тяжести $m_1\vec{g}$;

- сила Архимеда $\vec{F}_{A1} = -\rho_0 V_x \vec{g} = -\rho_0 \frac{m_1}{\rho_1}\frac{x}{l}\vec{g}$;

на грузило также действую сила тяжести $m_2\vec{g}$ и сила Архимеда

$\vec{F}_{A1} = -\rho_0 V_2 \vec{g} = -\rho_0 \frac{m_2}{\rho_2}\vec{g}$. Так как векторная сумма этих сил у нас будет часто встречаться в дальнейшем, то обозначим ее

$$\mu\vec{g} = m_2\vec{g} + \vec{F}_{A2} = m_2 \frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_2}\vec{g}$$

Условие равновесия поплавка записывается в виде следующего уравнения (сумма сил равна нулю):

$$\mu g + m_1 g = \rho_0 \frac{m_1}{\rho_1}\frac{x}{l} g\,. \quad (1)$$

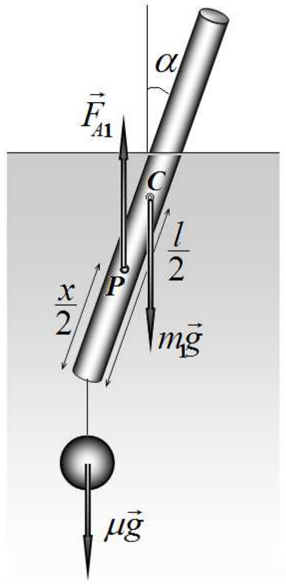
Из этого уравнения находим длину погруженной части поплавка

$$x = l \cdot \frac{\rho_1}{\rho_0}\left(1 + \frac{\mu}{m_1}\right). \quad (2)$$

Максимальной массе грузила соответствует погружение на всю длину поплавка. В этом случае их формулы (2) следует

$$\frac{\rho_1}{\rho_0}\left(1 + \frac{\mu}{m_1}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mu = m_1\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad m_{2\max} = m_1 \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_0}\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right). \quad (3)$$

5. На рисунке изображены силы, действующие на поплавок с грузилом, в том случае. Когда поплавок отклонился на угол α. Второе условие равновесия (равенство нулю суммы моментов сил) можно записать относительно точки C - центра масс поплавка



$$\mu g \frac{l}{2} \sin\alpha = F_{A1}\left(\frac{l}{2} - \frac{x}{2}\right)\sin\alpha . \qquad (3)$$

Это условие очевидно выполняется при $\alpha = 0$, т.е. при вертикальном положении поплавка. Исследуем возможности других решений. С учетом того, $F_{A1} = (\mu + m_1)g$ и после сокращения на синус угла отклонения, получим

$$\mu = (\mu + m_1)\left(1 - \frac{x}{l}\right). \qquad (4)$$

Из этого уравнения получим выражение для длины погруженной части:

$$\mu = (\mu + m_1)\left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{l} = \frac{m_1}{\mu + m_1} \quad , \qquad (5)$$

которое в общем случае не совпадает с выражением (2), полученным из условия равновесия сил.

Следовательно, других положений равновесия, кроме вертикального или горизонтального нет!

Единственный, исключительный вариант при котором поплавок находится в равновесии при любом угле наклона можно найти, приравнивая решения (2) и (5):

$$\frac{\rho_1}{\rho_0}\left(1 + \frac{\mu}{m_1}\right) = \frac{m_1}{\mu + m_1} \quad \Rightarrow \quad \left(1 + \frac{\mu}{m_1}\right)^2 = \frac{\rho_0}{\rho_1} \quad \Rightarrow \quad \mu = m_1\left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} - 1\right).$$

Учитывая определение μ, получим

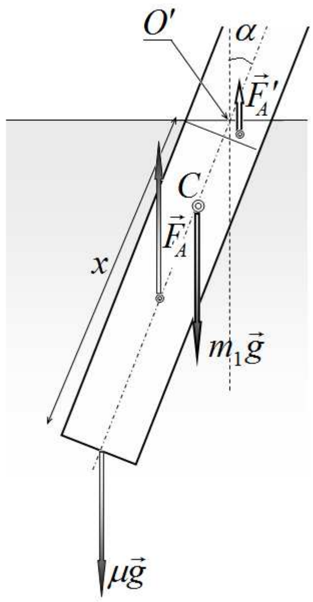
$$m_2^* \frac{\rho_2 - \rho_0}{\rho_2} = m_1\left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad m_2^* = m_1 \frac{\rho_2}{\rho_2 - \rho_0}\left(\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho_1}} - 1\right). \qquad (6)$$

Поплавок займет вертикальное положение при

$$\mu g \frac{l}{2} > F_{A1}\left(\frac{l}{2} - \frac{x}{2}\right). \qquad (7)$$

Это неравенство выполняется при $m_2 > m_2^*$

6. При вертикальном положении поплавка сила тяжести уравновешивается силой Архимеда, поэтому



$$F_{A1} = \mu g + m_1 g . \qquad (8)$$

Из этого уравнения легко найти длину погруженной части поплавка

$$F_{A1} = \mu g + m_1 g \quad \Rightarrow \quad \pi R^2 x_0 \rho_0 g = \mu g + m_1 g \quad \Rightarrow$$

$$x_0 = \frac{\mu + m_1}{\pi R^2 \rho_0} \qquad (9)$$

7. Силы, действующие на поплавок в наклонном положении, изображены на рисунке.

Так как величина x_0 не изменяется, то, во-первых, она определяется формулой (9), во-вторых, из геометрии системы следует, что

$$x_0 = x + R\, tg\alpha\,. \tag{10}$$

Рассчитаем модули сил и их моменты:
Сила тяжести поплавка:

$$\begin{gathered} F_1 = m_1 g \\ M_1 = m_1 g\left(x_0 - \frac{l}{2}\right)\sin\alpha \end{gathered} \tag{11}$$

Сумма сил, действующих на грузило:

$$\begin{gathered} F_2 = \mu g \\ M_2 = \mu g \cdot x_0 \sin\alpha \end{gathered} \tag{12}$$

Сила Архимеда, действующая на нижнюю цилиндрическую часть стержня

$$F_{A1} = \pi R^2 \rho_0 g x = \pi R^2 \rho_0 g\left(x_0 - R\cdot tg\alpha\right)$$

$$M_{A1} = \pi R^2 \rho_0 g\left(x_0 - R\cdot tg\alpha\right)\cdot\left(\frac{x}{2} + R\cdot tg\alpha\right)\sin\alpha = \tag{12}$$

$$= \pi R^2 \rho_0 g\,\frac{1}{2}\left(x_0^2 - R^2\cdot tg^2\alpha\right)\sin\alpha$$

Сила Архимеда, действующая на «срезанную часть»

$$F'_A = \pi R^3 \rho_0 g\cdot tg\alpha$$

$$M'_A = F'_A\cdot d_0 = \pi\frac{R^4}{8}\rho_0 g\cdot tg\alpha\cdot\left(5\cos\alpha - \frac{3}{\cos\alpha}\right) = \pi R^2\rho_0 g\,\frac{1}{8}R^2\left(5 - \frac{3}{\cos^2\alpha}\right)\sin\alpha = \tag{13}$$

$$= \pi R^2 \rho_0 g\,\frac{1}{8}R^2\left(2 - 3tg^2\alpha\right)\sin\alpha$$

Условия равновесия записываются в идее двух уравнений:
Сумма сил равна нулю:

$$\mu g + m_1 g = \pi R^2 x\rho_0 g + \pi R^3\rho_0 g\cdot tg\alpha\,. \tag{14}$$

Это условие выполняется при выполнении соотношения (10).

Сумма моментов сил равна нулю (относительно точки O')

$$M_1 + M_2 + M'_A - M_{A1} = 0 \tag{15}$$

Подставим в это уравнение найденные моменты сил.

Так как все они пропорциональны синусу угла наклона, то на него сразу сократим, не забывая о корне $\alpha_0^* = 0$ уравнения (15). Итак, после сокращения получаем

$$m_1\left(x_0 - \frac{l}{2}\right) + \mu\cdot x_0 + \pi R^2\rho_0\,\frac{1}{8}R^2\left(2 - 3tg^2\alpha\right) - \pi R^2\rho_0\,\frac{1}{2}\left(x_0^2 - R^2\cdot tg^2\alpha\right) = 0 \tag{16}$$

Это уравнение удобно разделить на величину $\pi R^2\rho_0$, тогда после элементарных преобразований получим уравнение

$$\frac{1}{2}x_0^2-\frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_0}l^2+\frac{1}{4}R^2+\frac{1}{8}R^2\cdot tg^2\alpha=0. \qquad (17)$$

В преобразования использовано соотношение $\frac{m_1}{\pi R^2\rho_0}=\frac{\rho_1}{\rho_0}l$.

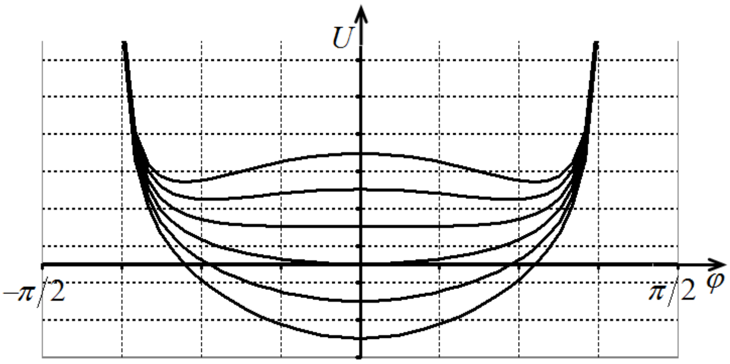
Уравнение (17) имеет решения (а следовательно поплавок другие положения равновесия) при выполнении условия

$$2\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}l^2-x_0^2\right)-R^2>0 \qquad (18)$$

И это решение есть

$$tg\,\alpha^*=\sqrt{4\frac{\frac{\rho_1}{\rho_0}l^2-x_0^2}{R^2}-2R^2}. \qquad (19)$$

Можно показать, что при наличии решения (19), это положение равновесия устойчиво, а при вертикальное неустойчиво. Если условие (18) не выполняется, то единственным и устойчивым положением равновесия является вертикальное.



Доказательство этого утверждения может быть проведено различными способами. Например, по анализу потенциальной кривой. Так, не сложно показать, что потенциальная энергия системы пропорциональна следующей функции угла наклона

$$U\propto\left(tg^2\alpha+b\right)\cos\alpha \qquad (20)$$

где обозначено $b=\frac{4\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}l^2-x_0^2\right)-2R^2}{R^2}$. На рисунке показан вид этой функции при последовательном увеличении параметра b от -2 до 6. При отрицательных значениях этого параметра потенциальная кривая имеет единственный минимум (в нуле), когда же этот параметр становится положительным, экстремум в нуле становится максимумом, но появляются два минимума вблизи горизонтального положения.

Задача 11-2 Фотоэлемент.

Часть 1. Идеальный фотоэлемент

1.1 Ток в нагрузке равен разности фототока и тока текущего через диод:

$$I_Н=I_Ф-I_D \qquad (1).$$

Напряжение на нагрузке такое же, как и на диоде. Подставляя $I_Н=\frac{U_Н}{R}$ и $I_D=CU_Н^2$, получим квадратное уравнение:

$$CU_Н^2+\frac{1}{R}U_Н-I_Ф=0 \qquad (2).$$

Решение имеет вид:

$$U_Н=\frac{-1+\sqrt{1+4CR^2I_Ф}}{2RC} \qquad (3).$$

Ток в нагрузке: