$$\frac{1}{2}x_0^2-\frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_0}l^2+\frac{1}{4}R^2+\frac{1}{8}R^2\cdot tg^2\alpha=0. \qquad (17)$$

В преобразования использовано соотношение $\frac{m_1}{\pi R^2\rho_0}=\frac{\rho_1}{\rho_0}l$.

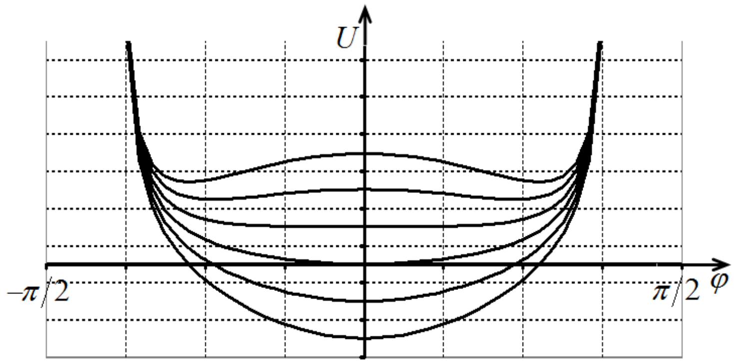
Уравнение (17) имеет решения (а следовательно поплавок другие положения равновесия) при выполнении условия

$$2\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}l^2-x_0^2\right)-R^2>0 \qquad (18)$$

И это решение есть

$$tg\,\alpha^*=\sqrt{4\frac{\frac{\rho_1}{\rho_0}l^2-x_0^2}{R^2}-2R^2}. \qquad (19)$$

Можно показать, что при наличии решения (19), это положение равновесия устойчиво, а при вертикальное неустойчиво. Если условие (18) не выполняется, то единственным и устойчивым положением равновесия является вертикальное.



Доказательство этого утверждения может быть проведено различными способами. Например, по анализу потенциальной кривой. Так, не сложно показать, что потенциальная энергия системы пропорциональна следующей функции угла наклона

$$U\propto\left(tg^2\alpha+b\right)\cos\alpha \qquad (20)$$

где обозначено $b=\frac{4\left(\frac{\rho_1}{\rho_0}l^2-x_0^2\right)-2R^2}{R^2}$. На рисунке показан вид этой функции при последовательном увеличении параметра b от -2 до 6. При отрицательных значениях этого параметра потенциальная кривая имеет единственный минимум (в нуле), когда же этот параметр становится положительным, экстремум в нуле становится максимумом, но появляются два минимума вблизи горизонтального положения.

Задача 11-2 Фотоэлемент.

Часть 1. Идеальный фотоэлемент

1.1 Ток в нагрузке равен разности фототока и тока текущего через диод:

$$I_\text{Н}=I_\Phi-I_D \qquad (1).$$

Напряжение на нагрузке такое же, как и на диоде. Подставляя $I_\text{Н}=\frac{U_\text{Н}}{R}$ и $I_D=CU_\text{Н}^2$, получим квадратное уравнение:

$$CU_\text{Н}^2+\frac{1}{R}U_\text{Н}-I_\Phi=0 \qquad (2).$$

Решение имеет вид:

$$U_\text{Н}=\frac{-1+\sqrt{1+4CR^2I_\Phi}}{2RC} \qquad (3).$$

Ток в нагрузке:

$$I_{\text{н}} = \frac{-1+\sqrt{1+4CR^2 I_{\text{ф}}}}{2CR^2} \quad (4).$$

1.2 Подставляя в (1) $I_D = CU_{\text{н}}^2$, получим связь между током и напряжением:

$$I_{\text{н}} = I_{\text{ф}} - CU_{\text{н}}^2 \quad (5).$$

1.3 При нулевом сопротивлении, напряжение на нагрузке равно нулю. А при большом сопротивлении нагрузки – ток равен нулю. Исходя из (5):

$$I_{\text{кз}} = I_{\text{ф}} \quad (6),$$

$$U_{\text{хх}} = \sqrt{\frac{I_{\text{ф}}}{C}} \quad (7).$$

1.4 График зависимости $I_{\text{н}}(U_{\text{н}})$ – ветвь параболы. Вершина имеет координаты $(0, I_{\text{кз}})$, точка пересечения с осью абсцисс – $U_{\text{хх}}$.

1.5 Умножим обе части равенства (5) на $U_{\text{н}}$:

$$I_{\text{н}}U_{\text{н}} = P_{\text{н}} = I_{\text{ф}}U_{\text{н}} - CU_{\text{н}}^3 \quad (8).$$

Приравняв к нулю производную по напряжению, получим:

$$U_{Pmax} = \sqrt{\frac{I_{\text{ф}}}{3C}} \quad (9).$$

Соответственно:

$$P_{max} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{I_{\text{ф}}^3}{3C}} \quad (10),$$

$$I_{Pmax} = I_{\text{ф}} - CU_{Pmax}^2 = \frac{2}{3}I_{\text{ф}} \quad (11),$$

$$R_{Pmax} = \frac{U_{Pmax}}{I_{Pmax}} = \frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3CI_{\text{ф}}}} \quad (12).$$

1.6 Используя численные значения, получим:

$$I_{\text{кз}} = 1{,}0 \text{ мА} \quad (13),$$

$$U_{\text{хх}} = 0{,}50 \text{ В} \quad (14),$$

$$I_{Pmax} = 0{,}67 \text{ мА} \quad (15),$$

$$U_{Pmax} = 0{,}29 \text{ В} \quad (16),$$

$$R_{Pmax} = 433 \text{ Ом} \quad (17),$$

$$P_{max} = 0{,}19 \text{ мВт} \quad (18).$$

Часть 2. Потери энергии в фотоэлементе

2.1 Фототок $I_{\text{ф}}$ разделяется на три части: ток диода I_D, ток через параллельное соединение $I_{\text{ПАР}}$ и ток через последовательное сопротивление и нагрузку $I_{\text{н}}$:

$$I_{\text{ф}} = I_D + I_{\text{ПАР}} + I_{\text{н}} \quad (19).$$

Напряжение на диоде и параллельном сопротивлении, можно выразить через ток в нагрузке:

$$U_D = U_{\text{ПАР}} = I_{\text{н}}(R_{\text{н}} + R_{\text{пос}}) \quad (20).$$

Тогда:

$$I_D = CI_{\text{н}}^2(R_{\text{н}} + R_{\text{пос}})^2 \quad (21),$$

$$I_{\text{ПАР}} = I_{\text{н}}\frac{R_{\text{н}} + R_{\text{пос}}}{R_{\text{ПАР}}} \quad (22).$$

Подставляя эти выражения в (19) получим квадратное уравнение относительно $I_{\text{н}}$:

$$C(R_{\text{н}} + R_{\text{пос}})^2 I_{\text{н}}^2 + \frac{R_{\text{н}} + R_{\text{пос}} + R_{\text{ПАР}}}{R_{\text{ПАР}}} I_{\text{н}} - I_{\text{ф}} = 0 \quad (23).$$

Решение уравнения:

$$I_{\text{Н}} = \frac{-\frac{R_{\text{Н}}+R_{\text{ПОС}}+R_{\text{ПАР}}}{R_{\text{ПАР}}}+\sqrt{\left(\frac{R_{\text{Н}}+R_{\text{ПОС}}+R_{\text{ПАР}}}{R_{\text{ПАР}}}\right)^2+4I_{\Phi}C(R_{\text{Н}}+R_{\text{ПОС}})^2}}{2C(R_{\text{Н}}+R_{\text{ПОС}})^2} \quad (24).$$

Напряжение на нагрузке $U_{\text{Н}} = I_{\text{Н}}R_{\text{Н}}$.

2.2 Вместо уравнения (20) запишем:

$$U_D = U_{\text{ПАР}} = U_{\text{Н}} + I_{\text{Н}}R_{\text{ПОС}} \quad (25).$$

Подставив в (19) получим искомую связь:

$$C(U_{\text{Н}} + I_{\text{Н}}R_{\text{ПОС}})^2 + \frac{U_{\text{Н}}+I_{\text{Н}}(R_{\text{ПОС}}+R_{\text{ПАР}})}{R_{\text{ПАР}}} - I_{\Phi} = 0 \quad (26).$$

2.3 Подставив в выражение (24) значение $R_{\text{Н}} = 0$, получим ток короткого замыкания:

$$I_{\text{КЗ}} = \frac{-\frac{R_{\text{ПОС}}+R_{\text{ПАР}}}{R_{\text{ПАР}}}+\sqrt{\left(\frac{R_{\text{ПОС}}+R_{\text{ПАР}}}{R_{\text{ПАР}}}\right)^2+4I_{\Phi}CR_{\text{ПОС}}^2}}{2CR_{\text{ПОС}}^2} \quad (27).$$

Аналогичное решение можно получить, полагая в уравнении (26) $U_{\text{Н}} = 0$.

Напряжение холостого хода найдем, приняв в (26) $I_{\text{Н}} = 0$.

$$U_{\text{ХХ}} = \frac{-1+\sqrt{1+4I_{\Phi}CR_{\text{ПАР}}^2}}{2CR_{\text{ПАР}}} \quad (28).$$

2.4. Численные значения тока короткого замыкания и напряжения холостого хода:

$$I_{\text{КЗ}} = 0{,}88 \text{ мА} \quad (29),$$

$$U_{\text{ХХ}} = 0{,}39 \text{ В} \quad (30).$$

2.5 Подставим численные значения в (26) и умножим обе части на 10^3:

$$4(U_{\text{Н}} + 100I_{\text{Н}})^2 + U_{\text{Н}} + 1100I_{\text{Н}} = 1 \quad (31).$$

Раскрыв скобки, получим:

$$4U_{\text{Н}}^2 + 10^4I_{\text{Н}}^2 + 800U_{\text{Н}}I_{\text{Н}} + U_{\text{Н}} + 1100I_{\text{Н}} = 1 \quad (32),$$

Т.к. ток всегда меньше 10^{-3}А, то слагаемым $10^4I_{\text{Н}}^2$ можно пренебречь.

Запишем уравнение в следующем виде:

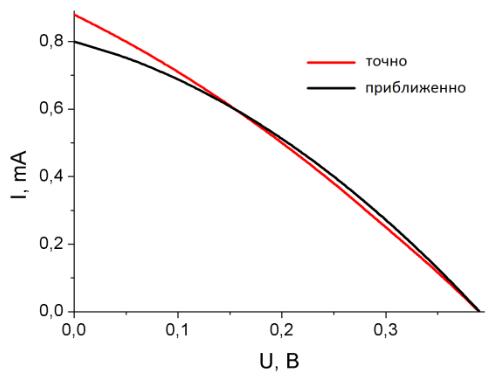
$$I_{\text{Н}}(1100 + 800U_{\text{Н}}) = 1 - 4U_{\text{Н}}^2 - U_{\text{Н}} \quad (33).$$

Величина $800U_{\text{Н}}$ изменяется незначительно – от 0 до 312. Положи ее равной 150.

Окончательно получим:

$$I_{\text{Н}} = \frac{1-4U_{\text{Н}}^2-U_{\text{Н}}}{1250} \quad (34).$$

На рисунке изображены графики зависимости $I_{\text{Н}}(U_{\text{Н}})$. Заметим, что отличия от точного построения невелики и проявляются при малых напряжениях



2.6 Используя удачное приближение из предыдущего пункта, можем записать:

$$P = I_{\text{Н}}U_{\text{Н}} = \frac{U_{\text{Н}}-4U_{\text{Н}}^3-U_{\text{Н}}^2}{1250} \quad (35).$$

Приравняв к нулю производную, получим:

$$U_{Pmax} = 0{,}22 \text{ В} \quad (36);$$

$$P_{max} = 0{,}10 \text{ мВт} \quad (37).$$