Решения задач.

Задача 9-1. «Федя – путешественник»

1.1 Пересчет скорости проводится традиционно

$$v = \frac{3{,}0 км}{1{,}0 час} = \frac{3000 м}{60 мин} = 50 \frac{м}{мин} \qquad (1)$$

1.2 Время движения Феди

$$T = \frac{S}{v} = \frac{5000 м}{50 \frac{м}{с}} = 1{,}0 \cdot 10^2\, мин\,. \qquad (2)$$

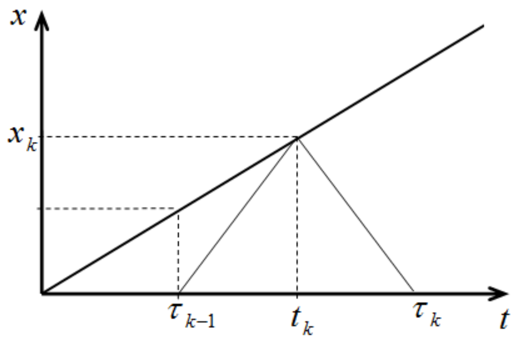
2.1 Сначала (в течении промежутка времени T) Федя движется равномерно, а затем остается в покое, поэтому

$$x_0(t) = \begin{cases} vt, & при\ t \le T \\ S, & при\ t \ge T \end{cases}. \qquad (3)$$

График закона движения показан на рис. 2.

1.4-1.5 Изобразим схематически законы движения Феди и Шарика (рис. 1). Пусть Шарик в очередной раз вернулся домой в момент времени τ_{k-1}. Следующая встреча с Федей произойдет в момент времени t_k, в точке с координатой

$$x_k = v t_k\ . \qquad (4)$$



Эту же координату можно выразить из закона движения Шарика на этом участке

$$x_k = u\left(t_k - \tau_{k-1}\right). \qquad (5)$$

Приравнивая эти выражения, получим

$$u\left(t_k - \tau_{k-1}\right) = v t_k \quad \Rightarrow \quad t_k = \frac{u}{u-v}\tau_{k-1}, \qquad (6)$$

Очевидно, что назад Шарик будет бежать столько же времени, как и до встречи, поэтому

$$\tau_k - t_k = t_k - \tau_{k-1}.$$

Из последних соотношений находим

$$\tau_k = 2t_k - \tau_{k-1} = 2\frac{u}{u-v}\tau_{k-1} - \tau_{k-1} = \frac{u+v}{u-v}\tau_{k-1}. \qquad (7)$$

Полученное соотношение показывает, что времена возвращения Шарика домой образуют геометрическую прогрессию, которую в явном виде можно записать (с учетом $u = 3v$)

$$\tau_k = \frac{u+v}{u-v}\tau_{k-1} \qquad \Rightarrow \quad \tau_k = \tau_0\left(\frac{u+v}{u-v}\right)^k = \tau_0 \cdot 2^k \qquad (8)$$

Из формулы (6) выразим моменты встреч Шарика с Федей

$$t_k = \frac{u}{u-v}\tau_{k-1} = \frac{u}{u-v}\left(\frac{u+v}{u-v}\right)^{k-1}\tau_0 = \tau_0 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2^k \qquad (9)$$

и координаты мест встречи

$$x_k = v t_k = \frac{u}{u-v}\left(\frac{u+v}{u-v}\right)^{k-1} v\tau_0 = v\tau_0 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2^k\,. \qquad (10)$$

По полученным формулам легко рассчитать численные значения времен и координат (см. Таблицу 1)

Таблица 1. Планируемый график движения Шарика.

k	Возвращение к дому		Встреча с Федей	
	τ_k (мин)	x (м)	t_k (мин)	x_k (м)
0	5,0	0		
1			7,5	375
	10	0		
2			15	750
	20	0		
3			30	1500
	40	0		
4			60	3000
	80	0		
5			120 (?) 113	6000 (?) 5000
	147	0		

Расчет показывает, что к четвертой ожидаемой встрече Федя уже дойдет до своей цели. Поэтому Шарик в четвертый раз встретит Федю в точке $x_4 = 5000\,м$, в момент времени

$$t_5 = \tau_4 + \frac{S}{u} = 80 + \frac{5000}{150} = 113\,мин\,. \qquad (11)$$

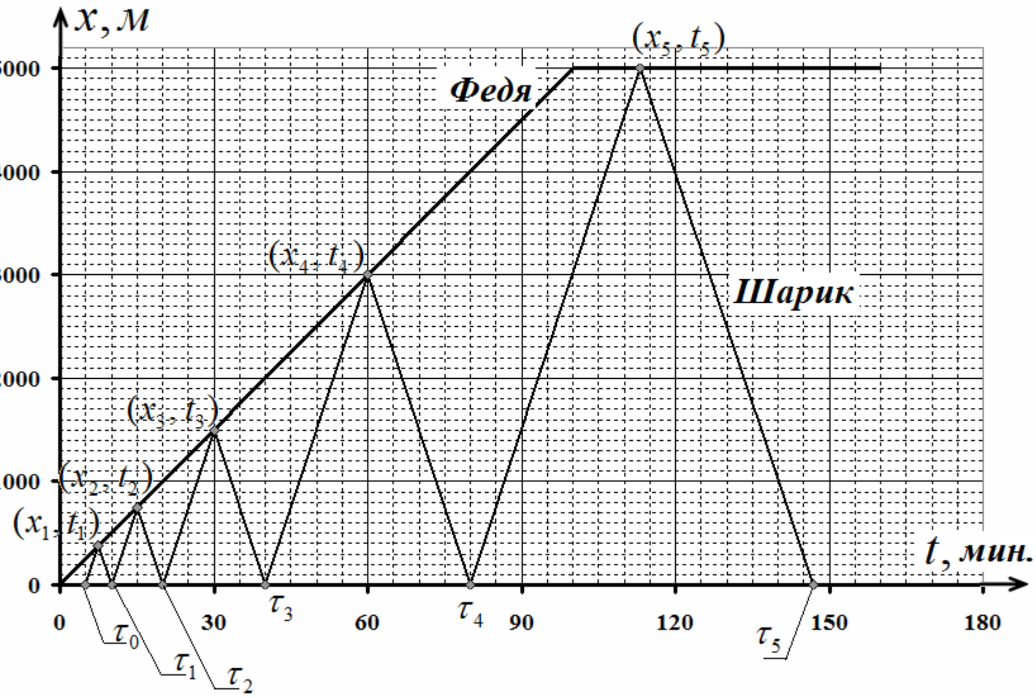
Последний раз Шарик должен вернуться домой в момент времени

$$\tau_5 = \tau_4 + 2\frac{S}{u} = 80 + 2\frac{5000}{150} = 147\,мин \qquad (12)$$

1.6 Так как Шарик должен двигаться с постоянной по модулю скоростью, то путь, который он должен пробежать равен

$$L = u\tau_5 = 150 \cdot 147 = 22000\,м = 22\,км \qquad (13)$$

1.7 График закона движения Шарика также показан на рис. 2.



2.1 Если Шарик отдыхал в течении промежутка $\Delta\tau_1$ и опоздал на время Δt_1, то она бежал в течении промежутка времени $((t_3+\Delta t_1)-(\tau_2+\Delta\tau_1))$ и догнал Федю в точке $x=v(t_3+\Delta t_1)$, поэтому должно выполняться соотношение

$$u((t_3+\Delta t_1)-(\tau_2+\Delta\tau_1))=v(t_3+\Delta t_1), \tag{13}$$

из которого определяем

$$\Delta\tau_1=\frac{(u-v)}{u}(t_3+\Delta t_1)-\tau_2=\frac{2}{3}\cdot 45-20=10\,мин\,. \tag{14}$$

Так десятиминутная задержка привела к пятнадцатиминутному опозданию, взбучке, лишним километрам, да еще и к необходимости резко увеличить скорость бега!

2.2 Так как неудачная встреча Шарика с Федей произошла в точке $x_3'=v(t_3+\Delta t_1)=2250\,м$, в момент времени $t_3'=45мин$, а следующая встреча в момент времени $t=\tau_4=60мин$ в точке $x_4=3000м$, то средняя скорость, которую должен развить Шарик должна быть равна

$$<u>=\frac{x_3'+x_4}{\tau_4-t_3'}=\frac{5250м}{15мин}=350\frac{м}{мин}\,. \tag{15}$$

Судя по документальной хронике – такая скорость Шарику доступна!

Возвратится же он домой после этой бешеной гонки в момент времени

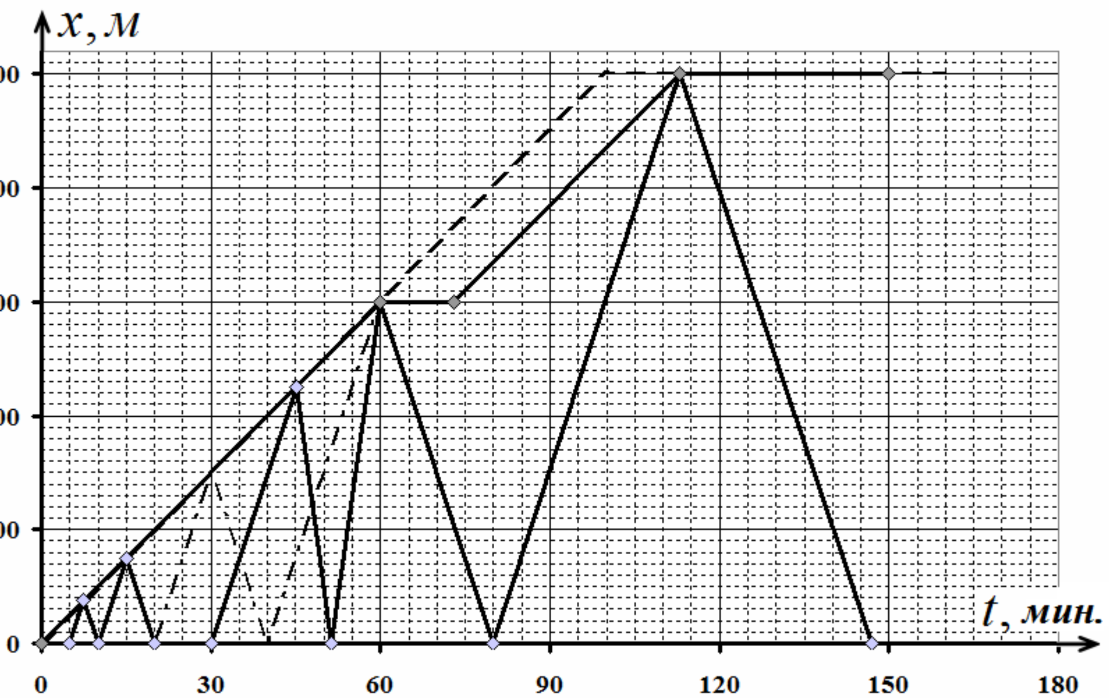
$$\tau_3'=t_3'+\frac{x_3'}{<u>}=45+\frac{2250}{350}=51мин\,. \tag{16}$$

Как видно, он более чем на 10 минут опоздал и на встречу с Матроскиным, что привело к еще одному воспитательному мероприятию!

2.3– 2.4 По плану Федя должен был входить в деревню в момент времени $T=100\,мин$, а в реальности он вошел в нее в момент времени $\tau_5=113\,мин$. Следовательно, он отдыхал в течении промежутка времени

$$\Delta t_2=\tau_5-T=13мин\,. \tag{17}$$

Где именно Федя устроил место отдыха сказать невозможно. Поэтому на графике закона движения этот горизонтальный участок может находиться в произвольном месте (на рис. 3 – сразу после встречи с Шариком).



2.6 Из графика видно, что удлинение пути произошло из-за того, что третья встреча произошла дальше, чем запланировано, при этом

$$\Delta L = 2\left(x_3' - x_3\right) = 2 \cdot \left(2250 - 1500\right) = 1500\,м = 1{,}5\,км\,. \tag{18}$$

Делайте все вовремя!

Задача 9. 2. Тепловая разминка

1. Определим массу льда m_1 и массу воды m_2, находящейся в сосуде, из системы уравнений, следующих из условия

$$\begin{cases} m = m_1 + m_2 \\ c_1 m_1 = c_2 m_2 \end{cases}. \tag{1}$$

Решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{c_2}{c_1 + c_2} m = 0{,}40\,\text{кг} \\ m_2 &= \frac{c_1}{c_1 + c_2} m = 0{,}20\,\text{кг} \end{aligned}\,. \tag{2}$$

Количество теплоты Q_1, необходимое для повышения температуры системы на $\Delta t_1 = 1{,}0\,°C$, складывается из количества теплоты Q_{11}, идущей на плавление льда

$$Q_{11} = \lambda \cdot m_1 = 132\,\text{кДж} \tag{3}$$

и количества теплоты Q_{12}, идущего на последующее нагревание воды массой $m = m_1 + m_2$ на $\Delta t_1 = 1{,}0\,°C$. Расчет в данном случае дает

$$Q_{12} = c_2 (m_1 + m_2) \Delta t_1 = 2{,}52\,\text{кДж}\,. \tag{4}$$

Суммарное количество теплоты при данной процедуре

$$Q_1 = Q_{11} + Q_{12} = 135\,\text{кДж}\,. \tag{5}$$

Соответственно, количество теплоты Q_2, необходимое для понижения температуры системы на тот же градус $\Delta t_1 = 1{,}0\,°C$ складывается из количества теплоты Q_{21}, идущей на замораживание воды

$$Q_{21} = \lambda \cdot m_2 = 66{,}0\,\text{кДж}$$

и количества теплоты Q_{22}, необходимого для последующего охлаждения льда массой $m = m_1 + m_2$ на $\Delta t_1 = 1{,}0\,°C$

$$Q_{22} = c_1 (m_1 + m_2) \Delta t_1 = 1{,}26\,\text{кДж}\,.$$

Суммарное количество теплоты, необходимое для этого

$$Q_2 = Q_{21} + Q_{22} = 67{,}3\,\text{кДж}\,.$$