11 класс.

Задача 11.1. Переносы…

Часть 1 Перенос вещества.

Для решения данной задачи необходимо последовательно рассмотреть изменения концентраций растворов при каждом переливании. Понятно, что при сливании растворов будут сохраняться суммарная масса растворенного вещества и их общий объем.

1.1 Массы растворенного вещества в сосудах и их общая масса определяются по очевидным формулам

$$m_A = x_0V; \quad m_B = y_0V \quad \Rightarrow \quad m_0 = x_0V + y_0V. \tag{1.1}$$

1.2 При наполнении малого сосуда в него попадет масса раствора, равная $\delta m_{A\to B} = x_0 v$. Эта масса попадет во второй сосуд, поэтому масса растворенного вещества во втором сосуде окажется равной $m_B = y_0V + \delta m_{A\to B} = y_0V + x_0v$, а его концентрация станет равной

$$y_1 = \frac{m_B}{V+v} = \frac{y_0V + x_0v}{V+v}. \tag{1.2}$$

Зачерпнув из второго сосуда, мы «захватим» массу растворенного вещества равную $\delta m_{B\to A} = y_1 v$. Она попадет в первый сосуд, при этом концентрация раствора в этом сосуде станет равной

$$\begin{gathered} x_1 = \frac{x_0(V-v) + y_1v}{(V-v)+v} = \frac{x_0(V-v) + \dfrac{y_0V + x_0v}{V+v}v}{V} = \\ = \frac{x_0\left(V^2 - v^2\right) + y_0Vv + x_0v^2}{V(V+v)} = \frac{x_0V^2 + y_0Vv}{V(V+v)} = \frac{x_0V + y_0v}{V+v} \end{gathered}. \tag{1.3}$$

1.3 Расчет разностей концентраций требует только аккуратности в алгебраических преобразованиях:

$$y_1 - x_0 = \frac{y_0V + x_0v}{V+v} - x_0 = \frac{y_0V + x_0v - x_0V - x_0v}{V+v} = (y_0 - x_0)\frac{V}{V+v}. \tag{1.4}$$

$$x_1 - y_1 = \frac{x_0V + y_0v}{V+v} - \frac{y_0V + x_0v}{V+v} = \frac{x_0(V-v) + y_0(v-V)}{V+v} = (x_0 - y_0)\frac{V-v}{V+v}. \tag{1.5}$$

Полученная формула является основой дальнейшего решения: разность концентраций после одного цикла уменьшается в

$$\lambda = \frac{V-v}{V+v} \tag{1.6}$$

раз. Это соотношение можно обобщить на любой следующий полный цикл переливания

$$x_k - y_k = \lambda(x_{k-1} - y_{k-1}). \tag{1.7}$$

Следовательно, разности концентраций образую геометрическую прогрессию, поэтому разность концентрации можно выразить в явном виде.

$$x_k - y_k = (x_0 - y_0)\lambda^k \tag{1.8}$$

1.4 Массы растворенных веществ выражаются через концентрации растворов

$$m_{Ak} = x_kV; \quad m_{Bk} = y_kV. \tag{1.9}$$

Общая масса этого вещества осталась неизменной, определяемой по формуле (1). Поэтому можно выразить и сумму концентраций растворов

$$(x_k + y_k)V = (x_0 + y_0)V \quad \Rightarrow \quad x_k + y_k = x_0 + y_0. \tag{1.10}$$

1.5 Таким образом, мы получили два уравнения (1.8) и (1.10) для определения концентраций растворов, решение которых представляет чисто техническую проблему, складывая эти уравнения получим концентрацию раствора в первом сосуде

$$\begin{cases} x_k - y_k = (x_0 - y_0)\lambda^k \\ x_k + y_k = x_0 + y_0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_k = \frac{1}{2}x_0\left(1+\lambda^k\right) + \frac{1}{2}y_0\left(1-\lambda^k\right). \tag{1.11}$$

Концентрацию раствора во втором сосуде можно выразить из уравнения (1.8):

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - (x_0 - y_0)\lambda^k = x_k = \frac{1}{2}x_0\left(1+\lambda^k\right) + \frac{1}{2}y_0\left(1-\lambda^k\right) - (x_0 - y_0)\lambda^k = \\ &= \frac{1}{2}x_0\left(1-\lambda^k\right) + \frac{1}{2}y_0\left(1+\lambda^k\right) \end{aligned}. \tag{1.12}$$

Наконец, подставляя значение параметра λ, получим выражения для концентраций через известные исходные параметры

$$x_k = \frac{1}{2}x_0\left(1+\left(\frac{V-v}{V+v}\right)^k\right) + \frac{1}{2}y_0\left(1-\left(\frac{V-v}{V+v}\right)^k\right). \tag{1.13}$$

$$y_k = \frac{1}{2}x_0\left(1-\left(\frac{V-v}{V+v}\right)^k\right) + \frac{1}{2}y_0\left(1+\left(\frac{V-v}{V+v}\right)^k\right). \tag{1.14}$$

Часть 2. Перенос теплоты «вручную».

Эта задача практически полностью аналогична первой части. Аналогом массы растворенного вещества служит количество переданной теплоты, а аналогом концентрации раствора – температура. Поэтому следует ожидать, что разности температур после одного цикла переноса («туда и обратно») будут составлять геометрическую процессию. Так в после опускания тела (имеющего температуру равную начальной температуре в первом сосуде), установится температура y_1, которую можно найти из уравнения теплового баланса[2]

$$C_0(x_0 - y_1) = cm(y_1 - y_0) \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{C_0 x_0 + cm y_0}{C_0 + cm}. \tag{2.1}$$

Аналогичное уравнение можно записать для определения установившуюся температуру в первом сосуде, после повторного опуская тела

$$C_0(x_1 - y_1) = cm(x_0 - x_1) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{cm x_0 + C_0 y_1}{C_0 + cm}. \tag{2.2}$$

Вычислив разности температур после первого цикла переноса

$$\begin{aligned} x_1 - y_1 &= \frac{cm x_0 + C_0 y_1}{C_0 + cm} - y_1 = \frac{cm x_0 - cm y_1}{C_0 + cm} = \\ &= \frac{cm x_0 - cm\dfrac{C_0 x_0 + cm y_0}{C_0 + cm}}{C_0 + cm} = \left(\frac{cm}{C_0 + cm}\right)^2 (x_0 - y_0) \end{aligned}, \tag{2.3}$$

видим, что аналогичное соотношения справедливо для любого цикла переноса, поэтому соотношение (3) показывает, что разности температур изменяются в геометрической прогрессии

$$x_k - y_k = (x_0 - y_0)\left(\frac{cm}{cm + C_0}\right)^{2k} = (x_0 - y_0)\lambda^k. \tag{2.4}$$

[2] В принципе, можно записывать уравнения вида (4) из первой части, истолковывая их в духе закона сохранения энергии. Однако мы предпочитаем более традиционную запись в виде уравнений теплового баланса.

где обозначено

$$\lambda = \left(\frac{cm}{cm + C_0}\right)^2 . \tag{2.5}$$

Теперь запишем уравнения теплового баланса для теплоты, перенесенной за k циклов:

$$(cm + C_0)(x_k - x_0) = cm(y_0 - y_k). \tag{2.6}$$

Это уравнение перепишем в виде:

$$(cm + C_0)x_k + cmy_k = (cm + C_0)x_0 + cmy_0 . \tag{2.7}$$

Так тело, с помощью которого осуществляется перенос теплоты, является малым, то в уравнении (6) можно считать, что $C_0 << cm$, и пренебречь малой теплоемкостью C_0. В этом случае получим

$$x_k + y_k = x_0 + y_0 . \tag{2.8}$$

Заметим, что использовать такое приближение в формуле (2.5) нельзя, так в этом случае $\lambda = 1$ и никакого переноса теплоты не будет.

Таким образом, мы получаем систему уравнений (2.4) и (2.8), для определения температур воды в сосудах, что и система уравнений (1.8) и (1.10) для определения концентраций. Поэтому температуры воды в сосудах будут определяться такими же соотношениями, как и выражения (1.11)-(1.12) для концентраций:

$$x_k = \frac{1}{2}x_0\left(1 + \lambda^k\right) + \frac{1}{2}y_0\left(1 - \lambda^k\right), \tag{2.8}$$

$$y_k = \frac{1}{2}x_0\left(1 - \lambda^k\right) + \frac{1}{2}y_0\left(1 + \lambda^k\right). \tag{2.9}$$

Только в этих выражениях параметр λ определяется по формуле (2.5)

<u>Не обязательное дополнение.</u>

Использование приближения $C_0 << cm$ не является обязательным. Можно точно решить и систему уравнений (2.4) и точного уравнения (2.7). Эти уравнение образуют систему, из которой не сложно найти явные выражения для температур воды в сосудах.

В первом:

$$\begin{cases} x_k - y_k = (x_0 - y_0)\lambda^k \\ \dfrac{cm + C_0}{cm}x_k + y_k = \dfrac{cm + C_0}{cm}x_0 + y_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_k = \frac{C_0}{2cm + C_0}x_0 + \frac{cm}{2cm + C_0}\left(x_0\left(1 + \lambda^k\right) + y_0\left(1 - \lambda^k\right)\right)$$

Во втором:

$$y_k = x_k - (x_0 - y_0)\lambda^k =$$

$$= \frac{cm + C_0}{2cm + C_0}\left(x_0\left(1 - \lambda^k\right) + y_0\left(1 + \lambda^k\right)\right) - \frac{C_0}{2cm + C_0}y_0$$

Если теперь положить $C_0 < cm$, то они переходят в формулы (2.8)-(2.9)

Часть 3. Перенос заряда.

Для решения этой задачи также можно воспользоваться аналогичным подходом. Только в данной задаче нам необходимо рассчитать изменение электрических зарядов, которые являются аналогами масс растворенных веществ (в первой части задачи) и количества теплоты (во второй части). Аналогом же концентраций и температур могут выступать электрические потенциалы. При контакте шаров происходит выравнивание именно их потенциалов. Если рассчитать изменение потенциалов, то далее можно найти и