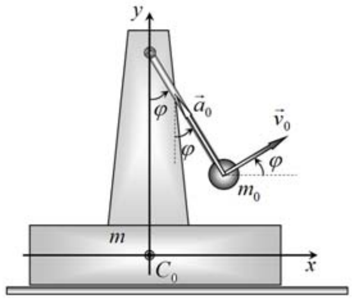
Задача 10.3 «Эксцентричная машинка»

1.Координаты (x_C, y_C) центра масс системы, состоящей из двух тел, определяются по формулам

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2}.$$

где m_1, m_2 - массы тел, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) - координаты их центров масс.

Свяжем систему отсчета с центром масс платформы C_0. В этой системе отсчета координаты центра масс рассчитываются по формулам



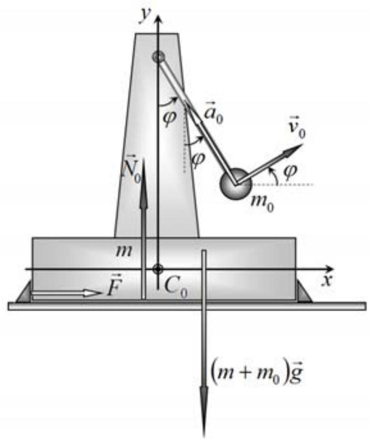
$$x_C = \frac{m_0 r \sin\varphi}{m + m_0}$$
$$y_C = \frac{h - m_0 r \cos\varphi}{m + m_0}, \qquad (1)$$

где h высота точки подвеса (несущественная для дальнейшего).

Вектор скорости движения шарика направлен перпендикулярно стержню и по модулю равен $v_0 = r\omega$. Проекции скорости центра масс системы определяются по формулам аналогичным (1). В рассматриваемом случае они равны

$$v_{xc} = \frac{m_0 r\omega \cos\varphi}{m + m_0}$$
$$v_{yc} = \frac{m_0 r\omega \sin\varphi}{m + m_0}, \qquad (2)$$

Ускорение шарика является центростремительным, поэтому направлено к оси вращения, равным по модулю $a_0 = r\omega^2$. Так же не сложно спроецировать это ускорение на оси координат и найти тем самым ускорение центра масс системы:



$$a_{xc} = -\frac{m_0 r\omega^2 \sin\varphi}{m + m_0}$$
$$a_{yc} = \frac{m_0 r\omega^2 \cos\varphi}{m + m_0}, \qquad (3)$$

2. Эту задачу проще всего решать, используя известное обобщение уравнения второго закона Ньютона для произвольной системы:

$$m\vec{a}_C = \vec{F}_{вн.}, \qquad (4)$$

произведение массы всей системы на ускорения центра масс равно сумме *внешних* сил, действующих на систему (иными словами – внутренние силы не могут изменить скорость центра масс). В рассматриваемой задаче внешними силами, действующими на систему, являются: $(m + m_0)\vec{g}$ - сила тяжести, $\vec{N}_0$ - сила реакции горизонтальной поверхности, $\vec{F}$ - силы реакции опор, удерживающих платформу.

В проекции на вертикальную ось уравнение (4) будет иметь вид (пока сама платформа неподвижна):

$$(m + m_0)a_{yc} = N_0 - (m + m_0)g. \qquad (5)$$

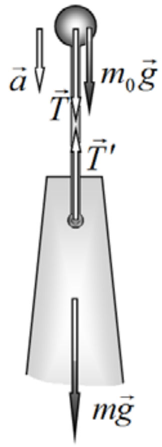
Платформа начнет попрыгивать, когда нормальная реакция обратится в нуль $N_0 = 0$. Выражая из уравнения (5) модуль этой силы и используя выражения (3), получим

$$N_0 = (m + m_0)g + (m + m_0)a_{yc} = (m + m_0)g + m_0 r\omega^2 \cos\varphi = 0 \qquad (6)$$

Минимальная угловая скорость ω_0, при которой возможно выполнения условия отрыва (6), соответствует углу отрыва, при котором $\cos\varphi = -1$, т.е. когда стержень расположен вертикально. В этом случае из уравнения (6) находим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(m + m_0)g}{m_0 r}} \qquad (7)$$

Дополнение (альтернативный вариант).



Данный пункт задачи допускает и более традиционное решение. При минимальной угловой скорости отрыв произойдет, когда шарик находится в верхней точке. В этом случае сила реакции стержня T определяется из уравнения второго закона Ньютона для шарика

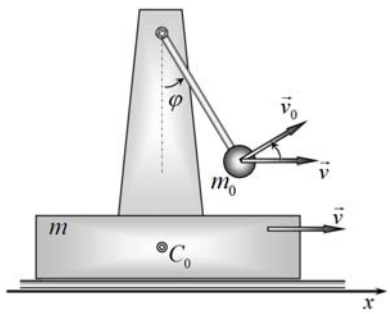
$$m_0 r\omega^2 = m_0 g + T.$$

Отрыв платформы от горизонтальной поверхности произойдет, если эта сила превысит силу тяжести платформы:

$$T > mg.$$

Из этих двух условий следует выражение (7) для минимальной угловой скорости, при которой платформа начнет отрываться от поверхности.

3. Рассмотрим движение платформы в инерциальной системе отсчета, связанной с неподвижной горизонтальной поверхностью. Обозначим[1] скорость платформы $\vec{v}$. В этой системе отсчета движение шарика является «составным»: равномерное вращение вокруг оси и поступательное движение вместе с платформой. Так как в данном случае нет внешних сил, имеющих горизонтальные составляющие, то ускорение центра масс всей системы должно быть равно нулю! Следовательно, скорость центра масс системы должна оставаться неизменной и определяться начальным условием – скоростью центра масс в момент отпускания платформы. Для определения скорости центра масс всей системы необходимо к найденной скорости центра масс, в системе отсчета, связанной с платформой прибавить скорость движения платформы



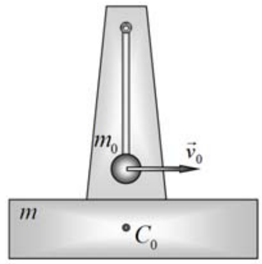
$$v_{xc} = \frac{m_0 r\omega\cos\varphi}{m + m_0} + v = const \ . \qquad (8)$$

Заметим, что скорость центра масс может быть найдена и непосредственно и закона сложения скоростей

$$v_{xc} = \frac{m_0(v + r\omega\cos\varphi) + mv}{m + m_0} \qquad (8^*)$$

[1] Заранее не очевидно, куда будет направлена эта скорость. Поэтому на рисунке мы направили ее в положительном направлении оси Ox, а дальше уравнения «покажут» куда она направлена на самом деле!

3.1 Константа в выражении (8) определяется скоростью центра масс в момент времени, когда отпустили платформу. Если платформу отпустили в тот момент, когда шарик находился в нижней точке, то горизонтальная составляющая скорости равна $v_0 = r\omega$, а скорость платформы равна нулю. Следовательно, скорость центра масс в этот момент времени (она же константа в выражении (8)) равна



$$v_{xc0} = \frac{m_0 r\omega}{m + m_0}.$$

Подставляя это значение в уравнение (8), находим из него зависимость скорости платформы от времени (с учетом того, что $\varphi = \omega t$)

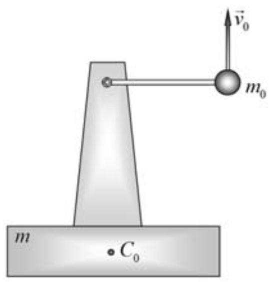
$$\frac{m_0 r\omega\cos\varphi}{m + m_0} + v = \frac{m_0 r\omega}{m + m_0} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{m_0 r\omega}{m + m_0}(1 - \cos\omega t). \tag{9}$$

Чтобы записать закон движения платформы, обратим внимание, что выражение для ее скорости содержит две составляющих: одну постоянную $\frac{m_0 r\omega}{m + m_0}$, вторую переменную $-\frac{m_0 r\omega}{m + m_0}\cos\omega t$, которая изменяется по тому же закону, что и скорость центра масс в системе отсчета, связанной с платформой (2), только с противоположным знаком! Первая составляющая описывает равномерное движение, вторая описывается тем же законом, что и координата центра масс x_C (1), только с противоположным знаком. Таким образом, закон движения платформы может быть записан в виде

$$x(t) = \frac{m_0 r\omega}{m + m_0}t - \frac{m_0 r}{m + m_0}\sin\omega t = \frac{m_0 r}{m + m_0}(\omega t - \sin\omega t). \tag{10}$$

Строго говоря, в этом выражении следует добавить начальную координату x_0, однако, совместив начало отсчета оси Ox с начальным положением платформы, мы эту постоянную делаем равным нулю.

3.2 Если платформу отпустили, когда стержень располагался горизонтально, то в этот момент времени горизонтальная проекция скорости шарика равна нулю, следовательно, и скорость центра масс всей системы также равна нулю. Поэтому в этом случае из уравнения (8) следует, что скорость платформы равна



$$\frac{m_0 r\omega\cos\varphi}{m + m_0} + v = 0 \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{m_0 r\omega\cos\varphi}{m + m_0}. \tag{11}$$

Следовательно, зависимость координаты от угла поворота в данном случае имеет вид

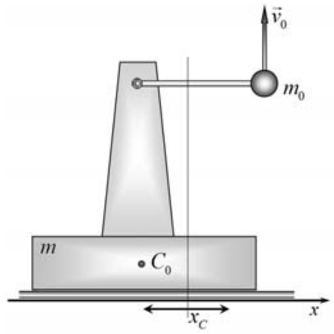
$$x(\varphi) = x_0 - \frac{m_0 r}{m + m_0}\sin\varphi. \tag{12}$$

Учтем, что при $t = 0 \quad \varphi = \pi/2$, и запишем зависимость координаты от времени в виде

$$x(t) = x_0 - \frac{m_0 r}{m + m_0}\sin(\omega t + \pi/2) = x_0 - \frac{m_0 r}{m + m_0}\cos\omega t. \tag{13}$$

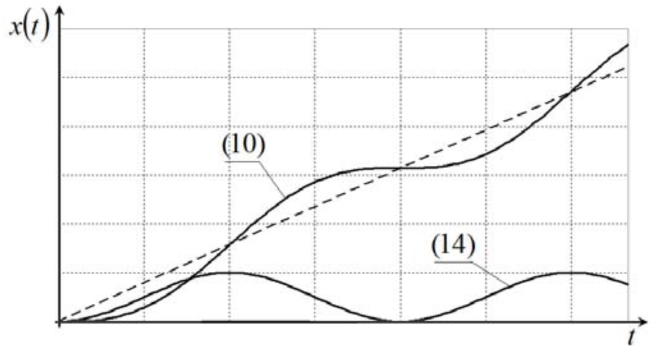
Наконец, полагая, что при $t = 0$ $x = 0$, находим $x_0 = \dfrac{m_0 r}{m + m_0}$ и получаем окончательный вид закона движения

$$x(t) = \frac{m_0 r}{m + m_0}\left(1 - \cos\omega t\right). \qquad (14)$$



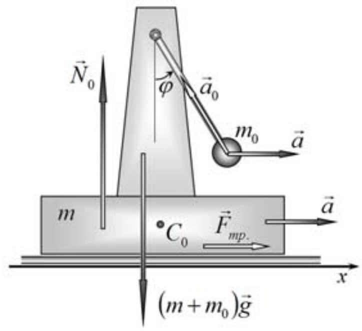
Полученное выражение легко объяснимо – платформа движется так, что положение центра масс всей системы x_C остается неизменным.

Схематические графики полученных законов движения (10) и (14) показаны на рисунке. Видно их принципиальное различие в одном случае платформа колеблется вокруг некоторого среднего положения, во втором – колебания накладываются на поступательное движение.



4. В этом случае также воспользуемся уравнением второго закона Ньютона для системы тел (4). В рассматриваемом в этом пункте задачи внешними силами, действующими на систему, являются: $(m + m_0)\vec{g}$ - сила тяжести, $\vec{N}_0$ - сила реакции горизонтальной поверхности, $\vec{F}_{тр.}$ - сила трения, действующая на платформу со стороны горизонтальной поверхности.

Для определения условий начала скольжения запишем уравнения второго закона Ньютона в проекциях на вертикальную и горизонтальную оси для покоящейся платформы:



$$\begin{aligned} (m + m_0)a_{yc} &= N_0 - (m + m_0)g \\ (m + m_0)a_{xc} &= F_{тр.} \end{aligned} \qquad (15)$$

Подставим выражения для ускорения центра масс:

$$\begin{aligned} m_0 r\omega^2 \cos\varphi &= N_0 - (m + m_0)g \\ -m_0 r\omega^2 \sin\varphi &= F_{тр.} \end{aligned} \qquad (16)$$

В этих уравнениях $F_{тр.}$ - сила трения покоя, платформа не будет проскальзывать, если модуль силы трения не достигнет своего максимального значения, то есть при выполнении условия

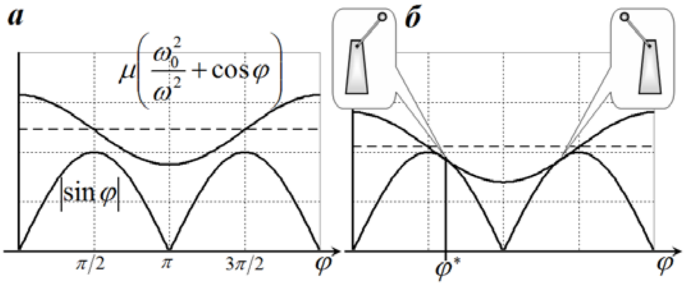
$$\left|F_{тр.}\right| < \mu N_0 \,. \qquad (17)$$

Выразим из уравнений (16) значение силы реакции и подставим их в неравенство (17)

$$\begin{cases} F_{тр.} = -m_0 r\omega^2 \sin\varphi \\ N_0 = (m + m_0)g + m_0 r\omega^2 \cos\varphi \end{cases} \Rightarrow \left|\sin\varphi\right| < \mu\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \cos\varphi\right) \qquad (18)$$

где $\omega_0^2 = \dfrac{(m + m_0)g}{m_0 r}$ - частота, при которой происходит отрыв от горизонтальной поверхности, найденная ранее в п. 2.

Схематически построим графики функций (рис. 10), входящих в неравенство (18). Из этих графиков следует, что при постепенном увеличении угловой скорости произойдет в интервале углов $\varphi \in [\pi/2, \pi]$, где синус угла положителен. Поэтому для определения угла, при котором произойдет срыв необходимо решить уравнение



$$\sin\varphi = \mu\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2} + \cos\varphi\right). \tag{19}$$

Для его решения проведем известные преобразования

$$\sin\varphi - \mu\cos\varphi = \sqrt{1+\mu^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}\sin\varphi - \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\cos\varphi\right) = ,$$

$$= \sqrt{1+\mu^2}\,\sin(\varphi - \beta)$$

где $\beta = arctg\,\mu$. Теперь это уравнение преобразуется к простейшему виду

$$\sin(\varphi - \beta) = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}. \tag{20}$$

Минимальное значение угловой скорости вращения стержня, при которой начнется горизонтальное движение платформы, определяется условием

$$\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 1 \quad \omega_1 = \omega_0\sqrt{\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}}. \tag{21}$$

При этом угол, при котором произойдет срыв, оказывается равным

$$\sin(\varphi - \beta) = 1 \quad \varphi^* = \frac{\pi}{2} + \beta = \frac{\pi}{2} + arctg\,\mu. \tag{22}$$

Подставляя численные значения параметров, вычислим минимальную скорость

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_0\sqrt{\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}} = \sqrt{\frac{(m+m_0)g}{m_0 r}\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}} = \sqrt{\frac{(1+\eta)g}{\eta r}\frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}} = \\ &= \sqrt{\frac{(1+0{,}20)\cdot 9{,}8}{0{,}20\cdot 1{,}0}\frac{0{,}35}{\sqrt{1+0{,}35^2}}} \approx 4{,}4\,c^{-1} \end{aligned} \tag{23}$$

5. Из рисунка 10б следует что, при малом превышении скорости ω_1, за один оборот срыв будет происходить дважды – один раз в одну сторону, другой раз в другую (при прочих равных условиях), поэтому средняя скорость движения платформы будет равна нулю.

<u>*Последнее замечание.*</u>

Задача может решаться и более традиционным способом, рассматривая силы, возникающие в стержне и действующие на ось и на шарик. Только следует учитывать, что при ускоренном движении платформы и при раскручивании шарика помимо продольных, будут присутствовать и поперечные силы (см. рис. 11).