11 класс.

Задача 11.1. Переносы…

Часть 1 Перенос вещества.

Для решения данной задачи необходимо последовательно рассмотреть изменения концентраций растворов при каждом переливании. Понятно, что при сливании растворов будут сохраняться суммарная масса растворенного вещества и их общий объем.

1.1 Массы растворенного вещества в сосудах и их общая масса определяются по очевидным формулам

$$m_A = x_0 V; \quad m_B = y_0 V \quad \Rightarrow \quad m_0 = x_0 V + y_0 V. \tag{1.1}$$

1.2 При наполнении малого сосуда в него попадет масса раствора, равная $\delta m_{A\to B} = x_0 v$. Эта масса попадет во второй сосуд, поэтому масса растворенного вещества во втором сосуде окажется равной $m_B = y_0 V + \delta m_{A\to B} = y_0 V + x_0 v$, а его концентрация станет равной

$$y_1 = \frac{m_B}{V+v} = \frac{y_0 V + x_0 v}{V+v}. \tag{1.2}$$

Зачерпнув из второго сосуда, мы «захватим» массу растворенного вещества равную $\delta m_{B\to A} = y_1 v$. Она попадет в первый сосуд, при этом концентрация раствора в этом сосуде станет равной

$$\begin{gathered} x_1 = \frac{x_0(V-v) + y_1 v}{(V-v)+v} = \frac{x_0(V-v) + \dfrac{y_0 V + x_0 v}{V+v} v}{V} = \\ = \frac{x_0\left(V^2 - v^2\right) + y_0 V v + x_0 v^2}{V(V+v)} = \frac{x_0 V^2 + y_0 V v}{V(V+v)} = \frac{x_0 V + y_0 v}{V+v} \end{gathered}. \tag{1.3}$$

1.3 Расчет разностей концентраций требует только аккуратности в алгебраических преобразованиях:

$$y_1 - x_0 = \frac{y_0 V + x_0 v}{V+v} - x_0 = \frac{y_0 V + x_0 v - x_0 V - x_0 v}{V+v} = (y_0 - x_0)\frac{V}{V+v}. \tag{1.4}$$

$$x_1 - y_1 = \frac{x_0 V + y_0 v}{V+v} - \frac{y_0 V + x_0 v}{V+v} = \frac{x_0(V-v) + y_0(v-V)}{V+v} = (x_0 - y_0)\frac{V-v}{V+v}. \tag{1.5}$$

Полученная формула является основой дальнейшего решения: разность концентраций после одного цикла уменьшается в

$$\lambda = \frac{V-v}{V+v} \tag{1.6}$$

раз. Это соотношение можно обобщить на любой следующий полный цикл переливания

$$x_k - y_k = \lambda(x_{k-1} - y_{k-1}). \tag{1.7}$$

Следовательно, разности концентраций образую геометрическую прогрессию, поэтому разность концентрации можно выразить в явном виде.

$$x_k - y_k = (x_0 - y_0)\lambda^k \tag{1.8}$$

1.4 Массы растворенных веществ выражаются через концентрации растворов

$$m_{Ak} = x_k V; \quad m_{Bk} = y_k V. \tag{1.9}$$

Общая масса этого вещества осталась неизменной, определяемой по формуле (1). Поэтому можно выразить и сумму концентраций растворов

$$(x_k + y_k)V = (x_0 + y_0)V \quad \Rightarrow \quad x_k + y_k = x_0 + y_0. \tag{1.10}$$

1.5 Таким образом, мы получили два уравнения (1.8) и (1.10) для определения концентраций растворов, решение которых представляет чисто техническую проблему, складывая эти уравнения получим концентрацию раствора в первом сосуде

$$\begin{cases} x_k - y_k = (x_0 - y_0)\lambda^k \\ x_k + y_k = x_0 + y_0 \end{cases} \Rightarrow \quad x_k = \frac{1}{2}x_0\left(1+\lambda^k\right) + \frac{1}{2}y_0\left(1-\lambda^k\right). \tag{1.11}$$

Концентрацию раствора во втором сосуде можно выразить из уравнения (1.8):

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - (x_0 - y_0)\lambda^k = x_k = \frac{1}{2}x_0\left(1+\lambda^k\right) + \frac{1}{2}y_0\left(1-\lambda^k\right) - (x_0 - y_0)\lambda^k = \\ &= \frac{1}{2}x_0\left(1-\lambda^k\right) + \frac{1}{2}y_0\left(1+\lambda^k\right) \end{aligned}. \tag{1.12}$$

Наконец, подставляя значение параметра λ, получим выражения для концентраций через известные исходные параметры

$$x_k = \frac{1}{2}x_0\left(1+\left(\frac{V-v}{V+v}\right)^k\right) + \frac{1}{2}y_0\left(1-\left(\frac{V-v}{V+v}\right)^k\right). \tag{1.13}$$

$$y_k = \frac{1}{2}x_0\left(1-\left(\frac{V-v}{V+v}\right)^k\right) + \frac{1}{2}y_0\left(1+\left(\frac{V-v}{V+v}\right)^k\right). \tag{1.14}$$

Часть 2. Перенос теплоты «вручную».

Эта задача практически полностью аналогична первой части. Аналогом массы растворенного вещества служит количество переданной теплоты, а аналогом концентрации раствора – температура. Поэтому следует ожидать, что разности температур после одного цикла переноса («туда и обратно») будут составлять геометрическую процессию. Так в после опускания тела (имеющего температуру равную начальной температуре в первом сосуде), установится температура y_1, которую можно найти из уравнения теплового баланса[2]

$$C_0(x_0 - y_1) = cm(y_1 - y_0) \quad \Rightarrow \quad y_1 = \frac{C_0 x_0 + cm y_0}{C_0 + cm}. \tag{2.1}$$

Аналогичное уравнение можно записать для определения установившуюся температуру в первом сосуде, после повторного опуская тела

$$C_0(x_1 - y_1) = cm(x_0 - x_1) \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{cm x_0 + C_0 y_1}{C_0 + cm}. \tag{2.2}$$

Вычислив разности температур после первого цикла переноса

$$\begin{aligned} x_1 - y_1 &= \frac{cm x_0 + C_0 y_1}{C_0 + cm} - y_1 = \frac{cm x_0 - cm y_1}{C_0 + cm} = \\ &= \frac{cm x_0 - cm \dfrac{C_0 x_0 + cm y_0}{C_0 + cm}}{C_0 + cm} = \left(\frac{cm}{C_0 + cm}\right)^2 (x_0 - y_0) \end{aligned}, \tag{2.3}$$

видим, что аналогичное соотношения справедливо для любого цикла переноса, поэтому соотношение (3) показывает, что разности температур изменяются в геометрической прогрессии

$$x_k - y_k = (x_0 - y_0)\left(\frac{cm}{cm + C_0}\right)^{2k} = (x_0 - y_0)\lambda^k. \tag{2.4}$$

---

[2] В принципе, можно записывать уравнения вида (4) из первой части, истолковывая их в духе закона сохранения энергии. Однако мы предпочитаем более традиционную запись в виде уравнений теплового баланса.

где обозначено

$$\lambda = \left(\frac{cm}{cm + C_0} \right)^2 . \qquad (2.5)$$

Теперь запишем уравнения теплового баланса для теплоты, перенесенной за k циклов:

$$(cm + C_0)(x_k - x_0) = cm(y_0 - y_k). \qquad (2.6)$$

Это уравнение перепишем в виде:

$$(cm + C_0)x_k + cmy_k = (cm + C_0)x_0 + cmy_0 . \qquad (2.7)$$

Так тело, с помощью которого осуществляется перенос теплоты, является малым, то в уравнении (6) можно считать, что $C_0 << cm$, и пренебречь малой теплоемкостью C_0. В этом случае получим

$$x_k + y_k = x_0 + y_0 . \qquad (2.8)$$

Заметим, что использовать такое приближение в формуле (2.5) нельзя, так в этом случае $\lambda = 1$ и никакого переноса теплоты не будет.

Таким образом, мы получаем систему уравнений (2.4) и (2.8), для определения температур воды в сосудах, что и система уравнений (1.8) и (1.10) для определения концентраций. Поэтому температуры воды в сосудах будут определяться такими же соотношениями, как и выражения (1.11)-(1.12) для концентраций:

$$x_k = \frac{1}{2} x_0 \left(1 + \lambda^k\right) + \frac{1}{2} y_0 \left(1 - \lambda^k\right), \qquad (2.8)$$

$$y_k = \frac{1}{2} x_0 \left(1 - \lambda^k\right) + \frac{1}{2} y_0 \left(1 + \lambda^k\right). \qquad (2.9)$$

Только в этих выражениях параметр λ определяется по формуле (2.5)

<u>Не обязательное дополнение.</u>

Использование приближения $C_0 << cm$ не является обязательным. Можно точно решить и систему уравнений (2.4) и точного уравнения (2.7). Эти уравнение образуют систему, из которой не сложно найти явные выражения для температур воды в сосудах.

В первом:

$$\begin{cases} x_k - y_k = (x_0 - y_0)\lambda^k \\ \dfrac{cm + C_0}{cm} x_k + y_k = \dfrac{cm + C_0}{cm} x_0 + y_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_k = \frac{C_0}{2cm + C_0} x_0 + \frac{cm}{2cm + C_0}\left(x_0\left(1 + \lambda^k\right) + y_0\left(1 - \lambda^k\right)\right)$$

Во втором:

$$y_k = x_k - (x_0 - y_0)\lambda^k =$$
$$= \frac{cm + C_0}{2cm + C_0}\left(x_0\left(1 - \lambda^k\right) + y_0\left(1 + \lambda^k\right)\right) - \frac{C_0}{2cm + C_0} y_0$$

Если теперь положить $C_0 < cm$, то они переходят в формулы (2.8)-(2.9)

Часть 3. Перенос заряда.

Для решения этой задачи также можно воспользоваться аналогичным подходом. Только в данной задаче нам необходимо рассчитать изменение электрических зарядов, которые являются аналогами масс растворенных веществ (в первой части задачи) и количества теплоты (во второй части). Аналогом же концентраций и температур могут выступать электрические потенциалы. При контакте шаров происходит выравнивание именно их потенциалов. Если рассчитать изменение потенциалов, то далее можно найти и значения зарядов шаров. Будем обозначать потенциалы первого шара после k полных циклов переноса - φ_k, а потенциалы второго шара ϕ_k. Строго говоря, при изменении расстояния между шарами их потенциалы изменяются (так как электрическое поле совершает работу), однако нас интересует количество перенесенного заряда, поэтому изменение потенциала при перемещении шарика для нас не существенно.

Пусть малый шарик касается большого, обозначим в этом положении электрическую емкость большого шара C, а емкость малого шарика c_0, суммарная емкость системы равна $(C + c_0)$. Если суммарный заряд двух соприкасающихся шаров равен Q, то потенциал же шаров будет равен

$$\varphi = \frac{Q}{C + c_0} \tag{3.1}$$

заряд малого шарика (следовательно, и переносимый заряд) рассчитывается по формуле

$$q = \frac{c_0}{C + c_0} Q \tag{3.2}$$

3.1 Таким образом, заданный параметр γ выражается через отношение емкостей[3]

$$\gamma = \frac{c_0}{C + c_0}, \quad 1 - \gamma = \frac{C}{C + c_0} \tag{3.3}$$

Для оценки этого параметра можно воспользоваться выражением для электрической емкости уединенного шара, которая пропорциональна его радиусу, то есть

$$\gamma \approx \frac{r}{R + r}. \tag{3.4}$$

Это выражение является приближенным, так как при электрическом контакте изменяется распределение зарядов на поверхностях шаров. В дальнейшем мы будем использовать выражение (3.3) для данного параметра.

3.2 Дальнейший ход решения полностью аналогичен решениям первых двух частей данной проблемы: основная идея остается прежней – получить рекуррентные соотношения для потенциалов шаров после каждого цикла переноса зарядов. «Начальным состоянием» будем считать, момент, когда маленький шарик первый раз касается первого шара.

Итак, мы прикоснулись маленьким шариков к первому шару, потенциал этой систему оказался равным

$$\varphi_0 = \frac{x_0}{C + c_0}. \tag{3.5}$$

На маленький шарик перетечет заряд равный $q = \dfrac{x_0 c_0}{C + c_0} = c_0 \varphi_0$, а на шаре остается заряд $C\varphi_0$. Заряд второго шарика выразим через его начальный потенциал $y_0 = C\phi_0$. Если шарик поднести ко второму шару, то суммарный заряд этой системы окажется равным $\tilde{y} = C\phi_0 + c_0\varphi_0$, а ее потенциал

$$\phi_1 = \frac{C\phi_0 + c_0\varphi_0}{C + c_0} = (1 - \gamma)\phi_0 + \gamma\varphi_0. \tag{3.6}$$

На маленьком шарике окажется заряд $q = c_0\phi_1$, а на втором шаре останется заряд $y_1 = C\phi_1$. Далее маленький шарик переносят к первому шару, суммарный заряд этой системы оказывается равным $(C\varphi_0 + c_0\phi_1)$, соответственно, потенциал системы

[3] Приводим также выражение для $(1 - \gamma)$, так оно нам понадобится в дальнейшем

$$\varphi_1 = \frac{C\varphi_0 + c_0\phi_1}{C + c_0} = (1-\gamma)\varphi_0 + \gamma\phi_1 . \tag{3.7}$$

Далее по общей схеме, находим разность потенциалов шаров после первого цикла переносов:

$$\begin{aligned} &\varphi_0 - \phi_1 = \varphi_0 - (1-\gamma)\phi_0 - \gamma\varphi_0 = (1-\gamma)(\varphi_0 - \phi_0) \\ &\varphi_1 - \phi_1 = (1-\gamma)\varphi_0 + \gamma\phi_1 - \phi_1 = (1-\gamma)(\varphi_0 - \phi_1) = (1-\gamma)^2(\varphi_0 - \phi_0) \end{aligned} . \tag{3.8}$$

Видим, что, как и в предыдущих частях, разности потенциалов изменяются в геометрической прогрессии

$$\varphi_k - \phi_k = (\varphi_0 - \phi_0)\lambda^k . \tag{3.9}$$

Здесь знаменатель прогрессии выражается через заданный в условии параметр γ:

$$\lambda = (1-\gamma)^2 . \tag{3.10}$$

Если пренебречь малым зарядом на маленьком шарике, с помощью которого осуществляется перенос, то заряды шариков пропорциональны их потенциалам, поэтому

$$x_k - y_k = (x_0 - y_0)\lambda^k . \tag{3.11}$$

Пренебрегая зарядом, находящимся на малом шарике, из условия сохранения заряда

$$x_k + y_k = x_0 + y_0 . \tag{3.12}$$

Таким образом, мы в третий раз получаем систему уравнений (3.11), (3.12), решение которой найдено ранее

$$x_k = \frac{1}{2}x_0\left(1+\lambda^k\right) + \frac{1}{2}y_0\left(1-\lambda^k\right), \tag{3.13}$$

$$y_k = \frac{1}{2}x_0\left(1-\lambda^k\right) + \frac{1}{2}y_0\left(1+\lambda^k\right). \tag{3.14}$$

3.3 Разность зарядов определяется по формуле (3.9), поэтому относительная разность зарядов определяется по формуле

$$\varepsilon = \frac{x_k - y_k}{x_0 + y_0} = \frac{x_0 - y_0}{x_0 + y_0}\lambda^k = \frac{\frac{x_0}{y_0} - 1}{\frac{x_0}{y_0} + 1}\lambda^k . \tag{3.15}$$

Из этого уравнения находим необходимое число актов переноса

$$\lambda^k = \varepsilon \frac{\frac{x_0}{y_0} + 1}{\frac{x_0}{y_0} - 1} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\lg \varepsilon \frac{x_0/y_0 + 1}{x_0/y_0 - 1}}{\lg(1-\gamma)^2} \approx 21 \tag{3.16}$$

<u>Не обязательное дополнение.</u>

Как и во второй части можно найти и точное решение полученной системы уравнений (3.9), (3.12). В уравнении (3.9) выразим потенциалы через искомые заряды:

$$\frac{x_k}{C+c_0} - \frac{y_k}{C} = \left(\frac{x_0}{C+c_0} - \frac{y_0}{C}\right)\lambda^k \quad \Rightarrow \quad \frac{C}{C+c_0}x_k - y_k = \left(\frac{C}{C+c_0}x_0 - y_0\right)\lambda^k \quad \Rightarrow$$

$$(1-\gamma)x_k - y_k = ((1-\gamma)x_0 - y_0)\lambda^k$$

Добавляем к этому уравнению условие сохранения заряда , получим

$$\begin{cases}(1-\gamma)x_k - y_k = ((1-\gamma)x_0 - y_0)\lambda^k \\ x_k + y_k = x_0 + y_0\end{cases} \Rightarrow$$

$$x_k = \frac{1}{2-\gamma}\left((1-\gamma)x_0\left(1+\lambda^k\right) + y_0\left(1-\lambda^k\right)\right) + \frac{\gamma}{2-\gamma}x_0$$

После этого находим заряд второго шара

$$y_k = x_0 + y_0 - \frac{1}{2-\gamma}\left((1-\gamma)x_0\left(1+\lambda^k\right) + y_0\left(1-\lambda^k\right)\right) - \frac{\gamma}{2-\gamma}x_0 =$$

$$= \frac{1}{2-\gamma}\left((1-\gamma)x_0\left(1-\lambda^k\right) + y_0\left(1+\lambda^k\right)\right) - \frac{\gamma}{2-\gamma}y_0 .$$

Если в этих выражениях положить $\gamma << 1$, то после упрощений получаем формулы (3.13)-(3.14). Разность зарядов в этом случае оказывается равной

$$x_k - y_k = \frac{2}{2-\gamma}((1-\gamma)x_0 - y_0)\lambda^k + \frac{\gamma}{2-\gamma}(x_0 + y_0)$$

Последнее слагаемое в данной формуле равен заряду на маленьком шарике, поэтому его следует отбросить. Тогда из формулы для относительной разности зарядов шаров находим необходимое число циклов переноса

$$\varepsilon = \frac{x_k - y_k}{x_0 + y_0} = \frac{2((1-\gamma)x_0 - y_0)}{(2-\gamma)(x_0+y_0)}\lambda^k = \frac{16}{20{,}9}\lambda^k \quad \Rightarrow \quad k = \frac{\lg 0{,}21/16}{2\lg 0{,}9} \approx 21,$$

которое не отличается от полученного ранее.

Задача 11.2 Порометрия

Часть 1

Введем следующие обозначения: ρ_B — плотность воды, ρ — плотность материала пористого тела. Пренебрегая силой Архимеда действующей в воздухе, можем записать выражение для веса тела в воздухе:

$$P_{Возд} = \rho(V_0 - V_П)g \qquad (1) .$$

Вес тела в воде:

$$P_B = \rho(V_0 - V_П)g - \rho(V_0 - V_П)g \qquad (2).$$

Вес в воде пористого тела с закрытыми порами:

$$P_{B3} = \rho(V_0 - V_П)g - \rho V_0 g \qquad (3).$$

Согласно условия задачи:

$$P_{Возд} = 2P_B = 3P_{B3} \qquad (4).$$

Решая систему получим:

$$V_0 = 4V_П \qquad (5),$$

т. е. пористость образца равна:

$$\xi = 25\% \qquad (6).$$

Часть 2

Рассмотрим отдельную пору, которая, как сказано в условии, представляет собой трубку определенного радиуса r. Т. к. ртуть не смачивает материал пористого тела, то ее движение внутри поры возможно только в случае, если сила, создаваемая внешним давлением ($p \cdot \pi r^2$), превосходит силы поверхностного натяжения $\sigma_P \cdot 2\pi r$ (краевой угол 180°). Другим словами, как только давление достигает значения:

$$p = 2\sigma_P / r \qquad (7),$$

ртуть полностью заполняет пору с радиусом r.