$$\begin{cases}(1-\gamma)x_k - y_k = ((1-\gamma)x_0 - y_0)\lambda^k \\ x_k + y_k = x_0 + y_0\end{cases} \Rightarrow$$

$$x_k = \frac{1}{2-\gamma}\left((1-\gamma)x_0\left(1+\lambda^k\right) + y_0\left(1-\lambda^k\right)\right) + \frac{\gamma}{2-\gamma}x_0$$

После этого находим заряд второго шара

$$y_k = x_0 + y_0 - \frac{1}{2-\gamma}\left((1-\gamma)x_0\left(1+\lambda^k\right) + y_0\left(1-\lambda^k\right)\right) - \frac{\gamma}{2-\gamma}x_0 = \\ = \frac{1}{2-\gamma}\left((1-\gamma)x_0\left(1-\lambda^k\right) + y_0\left(1+\lambda^k\right)\right) - \frac{\gamma}{2-\gamma}y_0 .$$

Если в этих выражениях положить $\gamma << 1$, *то после упрощений получаем формулы (3.13)-(3.14). Разность зарядов в этом случае оказывается равной*

$$x_k - y_k = \frac{2}{2-\gamma}((1-\gamma)x_0 - y_0)\lambda^k + \frac{\gamma}{2-\gamma}(x_0 + y_0)$$

Последнее слагаемое в данной формуле равен заряду на маленьком шарике, поэтому его следует отбросить. Тогда из формулы для относительной разности зарядов шаров находим необходимое число циклов переноса

$$\varepsilon = \frac{x_k - y_k}{x_0 + y_0} = \frac{2((1-\gamma)x_0 - y_0)}{(2-\gamma)(x_0+y_0)}\lambda^k = \frac{16}{20{,}9}\lambda^k \Rightarrow k = \frac{\lg 0{,}21/16}{2\lg 0{,}9} \approx 21,$$

которое не отличается от полученного ранее.

Задача 11.2 Порометрия

Часть 1

Введем следующие обозначения: ρ_B — плотность воды, ρ — плотность материала пористого тела. Пренебрегая силой Архимеда действующей в воздухе, можем записать выражение для веса тела в воздухе:

$$P_{Возд} = \rho(V_0 - V_П)g \quad (1) .$$

Вес тела в воде:

$$P_B = \rho(V_0 - V_П)g - \rho(V_0 - V_П)g \quad (2).$$

Вес в воде пористого тела с закрытыми порами:

$$P_{B3} = \rho(V_0 - V_П)g - \rho V_0 g \quad (3).$$

Согласно условия задачи:

$$P_{Возд} = 2P_B = 3P_{B3} \quad (4).$$

Решая систему получим:

$$V_0 = 4V_П \quad (5),$$

т. е. пористость образца равна:

$$\xi = 25\% \quad (6).$$

Часть 2

Рассмотрим отдельную пору, которая, как сказано в условии, представляет собой трубку определенного радиуса r. Т. к. ртуть не смачивает материал пористого тела, то ее движение внутри поры возможно только в случае, если сила, создаваемая внешним давлением ($p \cdot \pi r^2$), превосходит силы поверхностного натяжения $\sigma_P \cdot 2\pi r$ (краевой угол 180°). Другим словами, как только давление достигает значения:

$$p = 2\sigma_P / r \quad (7),$$

ртуть полностью заполняет пору с радиусом r.

Анализируя график, приведенный в условии, делаем вывод, что максимальный радиус пор равен:

$$r_1 = 2\sigma_P / p_0 \quad (8),$$

т. к. при меньшем давлении ртуть не входит в образец.

Затем, при достижения давления $2p_0$ и $3p_0$ объем вошедшей ртути, снова резко увеличивается, т. е. ртуть проникает в поры с радиусами $r_2 = \sigma_P / p_0$ и $r_3 = 2\sigma_P / 3p_0$. Таким образом в исследуемом образце существуют поры трех видов с радиусами r_1, $r_2 = r_1 / 2$ и $r_3 = r_1 / 3$.

Пусть общее количество пор равно $N = N_1 + N_2 + N_3$. Согласно зависимости приведенной на графике, объем ртути вошедшей в поры радиуса r_1 равен:

$$N_1 \pi r_1^2 l = 0{,}68 V_{MAX} \quad (9),$$

где l - длина поры.

Объем ртути вошедшей в поры радиуса r_2 и r_3:

$$N_2 \pi r_2^2 l = 0{,}85 V_{MAX} - 0{,}68 V_{MAX} = 0{,}17 V_{MAX} \quad (10)$$

и

$$N_3 \pi r_3^2 l = V_{MAX} - 0{,}85 V_{MAX} = 0{,}15 V_{MAX} \quad (11)$$

соответственно.

Тогда отношение числа пор:

$$N_1 r_1^2 / N_2 r_2^2 / N_3 r_3^2 = 0{,}68 / 0{,}17 / 0{,}15 \quad (12).$$

Подставляя соотношения между радиусами пор, получим:

$$N_1 / (1/4) N_2 / (1/9) N_3 = 0{,}68 / 0{,}17 / 0{,}15 \quad (13).$$

Преобразовав выражение (13), получим:

$$N_1 / N_2 / N_3 = 1/1/2 \quad (14).$$

Таким образом, 50 % пор имеют радиус r_3, 25 % - радиус r_2 и 25 % радиус r_1.

Часть 3

В случае порометрии капиллярных потоков необходимо вытеснять воду из пор образца. Вода выйдет и поры с радиусом r, когда разность давления достигнет значения:

$$\Delta p = 2\sigma_B / r \quad (15).$$

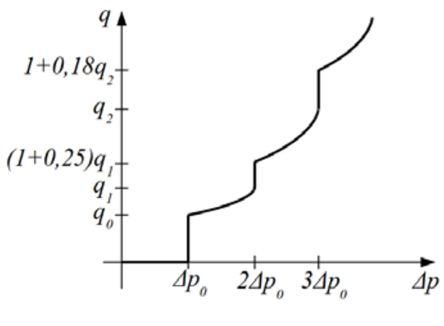
т. е. при разности давлений меньше $\Delta p_0 = 2\sigma_B / r_1$ (значение r_1 определено в предыдущем пункте) газ не будет проходить через образец. После того, как откроются поры большего радиуса, установится некоторый массовый расход газа:

$$q = \rho v S \quad (16),$$

где ρ - плотность газа;

v - скорость движения газа в порах;

S - суммарная площадь поперечного сечения пор определенного радиуса.



При увеличении давления (если не открываются поры меньшего радиуса) массовый расход газа будет увеличиваться, т. к. с одной стороны возрастает скорость движения газа в порах ($v \sim \Delta P$), а с другой возрастает плотность газа $\rho \sim \Delta P$. Таким образом массовый расход будет изменяться пропорционально квадрату разности давлений $q \sim \Delta p^2$.

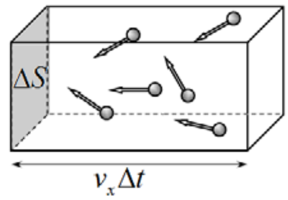
Затем при достижении давления $\Delta p = 2\sigma_B / r_2 = 2\Delta p_0$, расход снова резко увеличится, т. к.

откроются поры радиуса r_2. Суммарная площадь поперечного сечения этих пор в 4 раза меньше по сравнению с порами радиуса r_1 (количество пор такое же, но радиус в два раза меньше). Поэтому расход газа резко увеличится на 25 %.

Аналогичный «скачок» расхода произойдет, когда откроются самые маленькие поры. Площадь поперечного сечения увеличится на $0{,}15/(0.68+0{,}17)=0{,}176\approx 18\%$. На столько увеличится и расход газа. Качественный график зависимости расхода газа от разности давлений представлен на рисунке.

Задача 11.3 Испарение воды

1. Формулу для числа ударов молекул о стенку можно получить различными способами. Например, за время Δt до стенки долетят и ударятся о нее те молекулы, которые находятся на расстоянии меньшем $v_x \Delta t$, где v_x - проекция скорости молекулы на направление, перпендикулярное стенке. Если площадь рассматриваемой стенки равна ΔS, то число этих молекул равно (с учетом того, что половина молекул летит к стенке, а половина от нее)



$$\Delta N = \frac{1}{2} n |v_x| \Delta t \Delta S\ . \tag{1}$$

Далее необходимо провести усреднение по скоростям молекул. Корректный расчет приводит к результату

$$\nu = \frac{1}{4} n \langle v \rangle = \frac{1}{4} n \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{RT}{M}}\ . \tag{2}$$

<u>Комментарий.</u>
Трудно ожидать, что учащиеся средней школы выведут точно эту формулу, поэтому при оценивании работы приемлемы и другие значения коэффициентов в формуле (2). Например, более традиционное «школьное» выражение

$$\nu = \frac{1}{6} n v_{ср.кв.} = \frac{1}{6} n \sqrt{3 \frac{RT}{M}}\ . \tag{2*}$$

Численные значения коэффициентов равны $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{\pi}} \approx 0{,}40$ *в формуле (2);* $\frac{1}{6}\sqrt{3} \approx 0{,}29$.

Поэтому в численных расчетах погрешность в 30% допустима.

2. Число вылетевших молекул можно найти, используя понятие насыщенного водяного пара. Если над поверхностью воды находится насыщенный водяной пар, то число молекул вылетающих с поверхности равно числу молекул, возвращающихся обратно. Число возвращающихся молекул равно числу молекул, ударяющихся о поверхность, умноженному на коэффициент η (доля молекул, задерживаемых водой). Поэтому, число вылетающих в единицу времени с единицы площади молекул равно

$$\nu_0 = \frac{1}{4} n \langle v \rangle \eta = \frac{1}{4} \eta n \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{RT}{M}} = \frac{1}{4} \eta \frac{p_н}{kT} \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{RT}{M}}\ , \tag{3}$$

где концентрация молекул насыщенного пара выражена из уравнения состояния $n = \frac{p_н}{kT}$.

Масса всех молекул, вылетевших с единицы площади за промежуток времени Δt равна

$$\Delta m = \nu_0 m \Delta t\ , \tag{4}$$