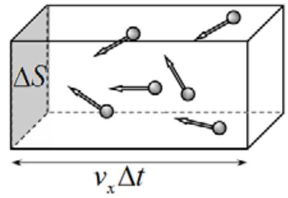
откроются поры радиуса r_2. Суммарная площадь поперечного сечения этих пор в 4 раза меньше по сравнению с порами радиуса r_1 (количество пор такое же, но радиус в два раза меньше). Поэтому расход газа резко увеличится на 25 %.

Аналогичный «скачок» расхода произойдет, когда откроются самые маленькие поры. Площадь поперечного сечения увеличится на $0{,}15/(0.68+0{,}17)=0{,}176\approx 18\%$. На столько увеличится и расход газа. Качественный график зависимости расхода газа от разности давлений представлен на рисунке.

Задача 11.3 Испарение воды

1. Формулу для числа ударов молекул о стенку можно получить различными способами. Например, за время Δt до стенки долетят и ударятся о нее те молекулы, которые находятся на расстоянии меньшем $v_x\Delta t$, где v_x - проекция скорости молекулы на направление, перпендикулярное стенке. Если площадь рассматриваемой стенки равна ΔS, то число этих молекул равно (с учетом того, что половина молекул летит к стенке, а половина от нее)



$$\Delta N=\frac{1}{2}n|v_x|\Delta t\Delta S\ . \tag{1}$$

Далее необходимо провести усреднение по скоростям молекул. Корректный расчет приводит к результату

$$\nu=\frac{1}{4}n\langle v\rangle=\frac{1}{4}n\sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{RT}{M}}\ . \tag{2}$$

<u>Комментарий.</u>
Трудно ожидать, что учащиеся средней школы выведут точно эту формулу, поэтому при оценивании работы приемлемы и другие значения коэффициентов в формуле (2). Например, более традиционное «школьное» выражение

$$\nu=\frac{1}{6}nv_{ср.кв.}=\frac{1}{6}n\sqrt{3\frac{RT}{M}}\ . \tag{2*}$$

Численные значения коэффициентов равны $\frac{1}{4}\sqrt{\frac{8}{\pi}}\approx 0{,}40$ *в формуле (2);* $\frac{1}{6}\sqrt{3}\approx 0{,}29$.
Поэтому в численных расчетах погрешность в 30% допустима.

2. Число вылетевших молекул можно найти, используя понятие насыщенного водяного пара. Если над поверхностью воды находится насыщенный водяной пар, то число молекул вылетающих с поверхности равно числу молекул, возвращающихся обратно. Число возвращающихся молекул равно числу молекул, ударяющихся о поверхность, умноженному на коэффициент η (доля молекул, задерживаемых водой). Поэтому, число вылетающих в единицу времени с единицы площади молекул равно

$$\nu_0=\frac{1}{4}n\langle v\rangle\eta=\frac{1}{4}\eta n\sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{RT}{M}}=\frac{1}{4}\eta\frac{p_н}{kT}\sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{RT}{M}}\ , \tag{3}$$

где концентрация молекул насыщенного пара выражена из уравнения состояния $n=\frac{p_н}{kT}$.

Масса всех молекул, вылетевших с единицы площади за промежуток времени Δt равна

$$\Delta m=\nu_0 m\Delta t\ , \tag{4}$$

где $m = \frac{M}{R}$ - масса одной молекулы воды. С другой стороны эта же величина может быть выражена через объем испарившейся воды $\Delta m = \rho \Delta h$. Приравнивая эти два выражения, найдем скорость высыхания

$$\frac{1}{4}\eta \frac{p_н}{kT}\sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{RT}{M}}\frac{M}{R}\Delta t = \rho \Delta h \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{1}{4}\eta \frac{p_н}{kT}\sqrt{\frac{8}{\pi}\frac{RT}{M}}\frac{M}{R}\frac{1}{\rho} = \eta \frac{p_н}{\rho}\sqrt{\frac{M}{2\pi RT}}. \qquad (5)$$

Подстановка численных значений приводит к результату

$$\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_0 = \eta \frac{p_н}{\rho}\sqrt{\frac{M}{2\pi RT}} = 0{,}04\frac{2{,}3\cdot 10^3}{1{,}0\cdot 10^3}\sqrt{\frac{18\cdot 10^{-3}}{2\pi \cdot 8{,}31\cdot 293}} \approx 1{,}0\cdot 10^{-4}\,\frac{м}{с} \approx 0{,}36\frac{м}{час} \qquad (6)$$

Как и было сказано в условии, оценка слишком завышена – трудно согласится с такой высокой скоростью испарения.

3. Так как над водой находится влажный воздух, то часть молекул воды, находящихся в воздухе, возвращается обратно в жидкость. Число этих молекул можно рассчитать по формуле (3), заменив в ней давление насыщенного пара на парциальное давление, которое равно $p = \varphi p_н$ (φ - относительная влажность воздуха). Таким образом, скорость испарения будет определяться разностью чисел молекул, вылетающих из жидкости и возвращающихся обратно. Иными словами, полученную оценку (6) следует умножить на $(1-\varphi)$:

$$\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_1 = \eta \frac{p_н}{\rho}\sqrt{\frac{M}{2\pi RT}}(1-\varphi) \approx 0{,}30\cdot 10^{-4}\,\frac{м}{с} \approx 0{,}11\frac{м}{час}. \qquad (6)$$

4. В стационарном состоянии диффузионный поток должен быть равен потоку частиц, покидающих поверхность воды.

4.1 Так как диффузионный поток пропорционален величине $\frac{\Delta n}{\Delta z}$ и постоянен по всей высоте сосуда, то концентрация молекул водяного пара должна убывать линейно с увеличением высоты над поверхностью сосуда. С учетом граничных условий, эта зависимость может быть записана в виде

$$n = n_0 - \frac{n_0 - n_1}{H} z. \qquad (7)$$

Так как влажность воздуха при постоянной температуре пропорциональна концентрации, то аналогичное соотношение справедливо и для относительной влажности

$$\varphi(z) = \varphi_0 - \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{H} z. \qquad (8)$$

где φ_1 - относительная влажность на высоте H

4.2 При заданных условиях диффузионный поток молекул воды определяется законом Фика, который приводит к выражению (с учетом $n = \frac{p_н}{kT}\varphi$)

$$q = DS\frac{p_н}{kT}\frac{\varphi_0 - \varphi_1}{H} \qquad (9)$$

4.3 С другой стороны этот же поток может быть выражен через число молекул воды вылетающих с поверхности жидкости

$$q = S\nu_0\left(1-\varphi_0\right), \qquad (10)$$

где ν_0 - величина, определяемая формулой (3).

Приравнивая эти потоки, получим

$$D\frac{p_н}{kT}\frac{\varphi_0-\varphi_1}{H} = \nu_0\left(1-\varphi_0\right) \quad\Rightarrow\quad \varphi_0 = \frac{\gamma\varphi_1+1}{\gamma+1} \qquad (11)$$

где обозначено $\dfrac{D}{H\nu_0}\dfrac{p_н}{kT} = \gamma$.

Найдем также величину

$$\left(1-\varphi_0\right) = 1-\varphi_0 = 1-\frac{\gamma\varphi_1+1}{\gamma+1} = \frac{\gamma}{1+\gamma}\left(1-\varphi_1\right). \qquad (12)$$

Так как скорость испарения пропорциональна $\left(1-\varphi_0\right)$, то расчета скорости испарения необходимо предыдущую оценку (6) умножить на коэффициент $\dfrac{\gamma}{1+\gamma}$. Рассчитаем численное значение параметра

$$\gamma == \frac{D}{H\nu_0}\frac{p_н}{kT} = \frac{4D}{H\eta\sqrt{\dfrac{8}{\pi}\dfrac{RT}{M}}} = \frac{4\cdot 3{,}1\cdot 10^{-5}}{0{,}1\cdot 0{,}04\sqrt{\dfrac{8}{\pi}\dfrac{8{,}31\cdot 293}{18\cdot 10^{-3}}}} \approx 5{,}3\cdot 10^{-5}. \qquad (13)$$

Так как этот параметр чрезвычайно мал, то им можно пренебречь в знаменателе выражения (12).

В этом случае скорость высыхания оказывается равной

$$\left(\frac{\Delta h}{\Delta t}\right)_2 = \gamma\eta\frac{p_н}{\rho}\sqrt{\frac{M}{2\pi RT}}\left(1-\varphi_1\right) \approx 1{,}6\cdot 10^{-9}\,\frac{м}{с} \approx 0{,}14\,\frac{мм}{сутки}. \qquad (14)$$

Итак, основной вывод из решения данной задачи – скорость высыхания определяется не скоростью выхода молекул из жидкости, а скоростью диффузии водяного пара в окружающую среду!

Заметим, что в данном случае скорость высыхания полностью определяется диффузионным потоком, а над поверхностью воды находится практически насыщенный пар. В этом прямая подстановка значения параметра γ в выражение для потока испаряющихся частиц дает

$$\nu = \left(1-\varphi_0\right)\nu_0 = \gamma\left(1-\varphi_1\right)\nu_0 = D\frac{n_{нас}}{H}\left(1-\varphi_0\right). \qquad (15)$$

Таким образом, этот поток равен диффузионному потоку, при условии, что над жидкостью находится насыщенный пар. С этой точки зрения можно провести и прямой расчет скорости высыхания

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = D\frac{n_{нас}}{H}\left(1-\varphi_0\right)\frac{M}{N_A}\frac{1}{\rho} = \frac{D}{H}\frac{p_н M}{RT}\frac{1}{\rho}\left(1-\varphi_0\right) = \frac{3{,}1\cdot 10^{-5}\cdot 2{,}3\cdot 10^{3}\cdot 18\cdot 10^{-3}}{0{,}1\cdot 8{,}31\cdot 293\cdot 1\cdot 10^{3}}\cdot 0{,}3 \approx$$

$$\approx 1{,}6\cdot 10^{-9}\,\frac{м}{с} \approx 0{,}14\,\frac{мм}{сутки}.$$