4. Время разгона равно: $t_P = \dfrac{v}{a_P} = 124 шага$, время торможения $t_T = 83 шага$, а время движения с постоянной скоростью $t_П = \dfrac{200 столбов}{v} = 278 шагов$. Тогда средняя скорость равна:

$$\langle v \rangle = \frac{45+200+35}{124+278+83} = 0{,}58\frac{столбов}{шаг} \qquad (5).$$

5. Обозначим длину шага Феди за l. Тогда за время, в течение которого Федя делает 15 шагов, поезд равноускоренно пройдет расстояние $(50+15)l$. Следовательно:

$$\frac{a_P 15^2}{2} = 65l \qquad (6).$$

Подставляя значение ускорения, получим:

$$l = 0{,}01 столба \qquad (7).$$

6. Один столб равен 100 шагам. Поэтому:

$$a_P = 0{,}58 шаг^{-1} \qquad (8),$$

$$a_T = 0{,}87 шаг^{-1} \qquad (9),$$

$$v = 72 \qquad (10),$$

$$\langle v \rangle = 58 \qquad (11),$$

Формально скорость становится безразмерной величиной, а ускорение измеряется в обратных шагах. Однако на самом деле не вполне корректно сокращать шаги в числителе и в знаменателе, т. к. в знаменателе шаг является мерой расстояния, а в числителе мерой времени.

7. По результатам забега на 100-метровую дистанцию, определяем, что длина шага Феди равна 0,5 м, а промежуток времени между ними равен 1,2 с. Расстояние между столбами, очевидно, 50 м. Подставляя в (2) — (5), получим:

$$a_P = 0{,}2\frac{м}{с^2} \qquad (12),$$

$$a_T = 0{,}3\frac{м}{с^2} \qquad (13),$$

$$v = 30\frac{м}{с} \qquad (14),$$

$$\langle v \rangle = 24\frac{м}{с} \qquad (15).$$

8. Расстояние между остановками:

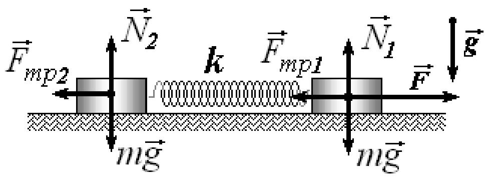
$$S = 280\,\text{столбов} \cdot 50м = 14км \qquad (16).$$

Задача 9.3. Пружинки.

1.1 Ускорение a системы, образованной двумя брусками, найдем из второго закона Ньютона

$$2ma = F - 2F_{тр} = F - 2\mu mg\,, \qquad (1)$$

где $F_{тр} = F_{тр1} = F_{тр2}$ сила трения, действующая на каждый из брусков.



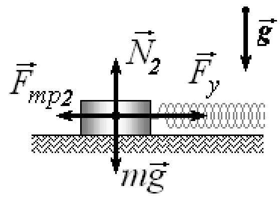
Поскольку силы упругости пружины в данном случае являются внутренними (действуют на оба бруска), то в уравнение (1) они не вошли (на рисунке не отмечены).

Из (1) получим

$$a = \frac{F - 2\mu mg}{2m}. \qquad (2)$$

Подчеркнем, что при записи (1) и (2) предполагается (и следует из условия задачи), что выполняется условие $F > 2\mu mg$.

Теперь применим второй закон Ньютона к движению левого бруска *2,* который ускоряется под действием силы упругости пружины $\vec{F}_y$ и силы трения $\vec{F}_{тр2}$



$$ma = F_y - F_{тр2} = F_y - \mu mg. \qquad (3)$$

Выражая из (3) значение силы упругости F_y пружины, найдем

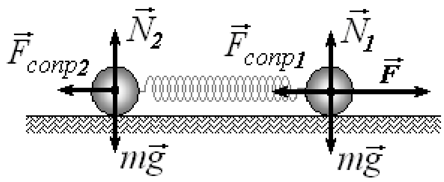
$$ma = m\frac{F - 2\mu mg}{2m} = F_y - \mu mg. \qquad (4)$$

Из (4) следует, что $F_y = \dfrac{F}{2}$, следовательно, согласно закону Гука

$$F_y = \frac{F}{2} = k\Delta x \;\;\Rightarrow\;\; \Delta x = \frac{F}{2k}. \qquad (5)$$

Как следует из (5), абсолютное удлинение пружины Δx в данном случае прямо пропорционально модулю F силы, приложенной к одному из брусков. Интересно, что коэффициент трения μ брусков о плоскость не вошел в окончательный ответ.

1.2 Под действием внешней силы шары начнут ускоряться по горизонтальной плоскости (сухим трением, согласно условию, можно пренебречь). По мере роста скорости шаров будут увеличиваться модули сил сопротивления $\vec{F}_{сопр}$, действующих на них в системе, причем, поскольку скорости шаров одинаковы, то $F_{сопр1} = F_{сопр2}$. Следовательно, при некоторой скорости $\upsilon_1 = const$



сумма сил сопротивления сравняется по модулю с силой $\vec{F}$, после чего разгон системы прекратится (движение установится, т.е. ее ускорение станет равным нулю $a = 0$).

Запишем второй закон Ньютона для установившегося движения системы шаров

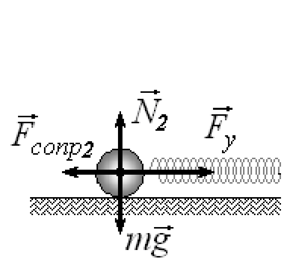
$$2ma = 0 = F - 2F_{сопр} = F - 2\beta\upsilon_1. \qquad (6)$$

Поскольку силы упругости пружины в данном случае являются внутренними (действуют на оба шара), то в уравнение (6) они не вошли.

Из (6) следует, что

$$F_{сопр} = \frac{F}{2}.$$

Аналогично применяя второй закон Ньютона к установившемуся движению шара *2*, получим



$$ma = 0 = F_y - F_{сопр2}. \qquad (7)$$

Из (7) найдем модуль силы упругости

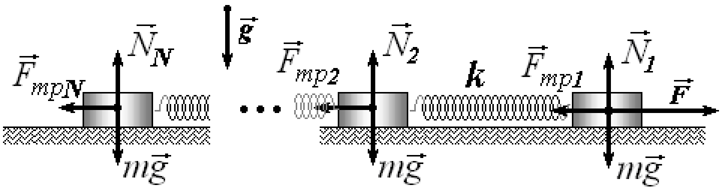
$$F_y = F_{сопр2} = \frac{F}{2}. \qquad (8)$$

Применяя закон Гука, находим абсолютное удлинение пружины Δx в зависимости от модуля F приложенной силы

$$F_y = \frac{F}{2} = k\Delta x \quad \Rightarrow \quad \Delta x = \frac{F}{2k}. \qquad (9)$$

Как следует из (9), абсолютное удлинение пружины Δx в данном случае также прямо пропорционально модулю F силы, приложенной к одному из шаров. Опять же интересно, что коэффициент сопротивления β также не вошел в окончательный ответ.

1.3 В случае произвольного количества N брусков действуем аналогично пункту 1.1 задачи. Рассмотрим все бруски как целое (систему), имеющую массу $M = N \cdot m$. Силы упругости пружин в данном случае опять являются внутренними (действуют попарно) и их можно не учитывать при записи второго закона Ньютона

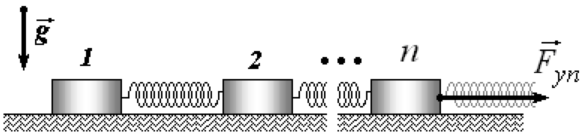


$$Nma = F - NF_{mp} = F - N\mu mg. \qquad (10)$$

Из (10) найдем ускорение системы как целого

$$a = \frac{F - N\mu mg}{Nm}. \qquad (11)$$

Далее рассмотрим n–ый брусок от конца цепочки. Сила упругости n–ой пружины F_{yn}, действующая на него слева, разгоняет n брусков, следовательно, второй закон Ньютона для системы рассматриваемых брусков примет вид



$$nma = F_{yn} - nF_{mp} = F_y - n\mu mg \qquad (12)$$

Из (12) найдем модуль F_{yn} силы упругости n–ой пружины

$$F_{yn} = \frac{n}{N}F. \qquad (13)$$

Согласно (13) натяжение пружин цепочки возрастает пропорционально номеру n пружины от конца цепочки. Следовательно, минимальное натяжение будет у пружины с номером $n = 1$ (в конце цепочки), а максимальное — с номером $n = N - 1$, у пружины в начале цепочки, прикрепленной к грузу, на который действует сила $\vec{F}$.

Аналогично будет вести себя и абсолютная деформация n–ой пружины

$$\Delta x_n = \frac{F_{yn}}{k} = \frac{n}{N}\frac{F}{k}. \qquad (14)$$

Как следует из (14) для нахождения суммарного удлинения всех пружин $\Delta x_{общ}$ необходимо найти сумму членов арифметической прогрессии

$$\Delta x_{общ} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots \Delta x_{N-1} = \sum_{n=1}^{N-1} \Delta x_n. \qquad (15)$$

При записи (15) учтено, что между N брусками расположено $N - 1$ пружина.
Суммирование дает

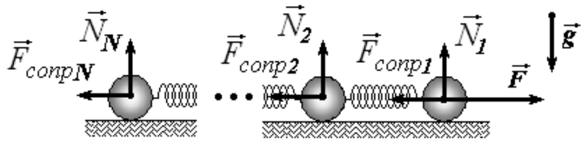
$$\Delta x_{общ} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots \Delta x_{N-1} = \frac{1}{N}\frac{F}{k} + \frac{2}{N}\frac{F}{k} + \ldots \frac{N-1}{N}\frac{F}{k} = \frac{F}{Nk}(1 + 2 + \ldots (N-1)) = \frac{F}{k}\frac{(N-1)}{2}$$
(16)

Окончательный ответ

$$\Delta x_{общ} = \frac{F}{k}\frac{(N-1)}{2}. \quad (17)$$

1.4 Поведение системы из N шаров, движущихся в вязкой среде, будет аналогично поведению двух шаров, рассмотренных в пункте 1.2 задачи — с течением времени скорости шаров перестанут меняться, т.е. примут некоторое установившееся значение υ_2. (ускорение системы станет равным нулю $a = 0$).

Деформации пружин при этом также будут оставаться неизменными.



Запишем второй закон Ньютона для установившегося движения системы (ускорение равно нулю)

$$F - NF_{сопр} = 0 \;\Rightarrow\; F_{сопр} = \frac{F}{N} \quad (18)$$

Опять же рассмотрим n–ый шарик от конца цепочки. Сила упругости n–ой пружины $F_{уп}$, действующая на него слева, движет n брусков, следовательно, второй закон Ньютона для рассматриваемых шариков примет вид

$$ma = 0 = F_{уп} - nF_{сопр} \;\Rightarrow\; F_{уп} = \frac{n}{N}F \quad (19)$$

Как видим результат (19) полностью аналогичен выражению (13) для предыдущего пункта задачи. Следовательно, суммарное удлинение пружин $\Delta x_{общ}$ в данном случае также можно просчитать как сумму соответствующей арифметической прогрессии

$$\Delta x_{общ} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + ...\Delta x_{N-1} = \frac{F}{Nk}(1 + 2 + ...(N-1)) = \frac{F}{k}\frac{(N-1)}{2}. \quad (20)$$

Окончательный ответ

$$\Delta x_{общ} = \frac{F}{k}\frac{(N-1)}{2}. \quad (21)$$

При большом числе шаров ($N \to \infty$) единицей в числителе (21) можно пренебречь. В таком случае выражение для суммарного удлинения принимает вид

$$\Delta x_{общ} \approx \frac{F}{k}\frac{N}{2}$$

Интересно, что при рассмотрении различных механизмов трения (сухого и вязкого) окончательные результаты (17) и (21) для суммарного удлинения систем совпали. Подумайте самостоятельно, всегда ли будет иметь место подобное совпадение.