## Задача 11-1. «Радар-спидометр»

### Часть 1. Импульсная локация.

**1.1** Так как автомобили движутся равномерно, то законы их движения имеют вид

$$x_a(t) = x_0 + vt, \tag{1}$$

$$x_b(t) = ut. \tag{2}$$

**1.2** Импульс номер $k$ испущен в момент времени $t_k^{(0)} = k\tau$ в точке с координатой $x_k^{(0)} = uk\tau$.

Закон движения импульса до отражения имеет вид

$$x_1(t) = x_k^{(0)} + c\left(t - t_k^{(0)}\right) = uk\tau + c(t - k\tau) = ct - (c-u)k\tau. \tag{3}$$

В момент отражения координаты импульса и автомобиля равны $x_1(t) = x_a(t)$. Из этого условия находим время отражения

$$ct - (c-u)k\tau = x_0 + vt \quad \Rightarrow \quad t_k^{(1)} = \frac{x_0}{c-v} + \frac{c-u}{c-v}k\tau \tag{4}$$

И координату соответствующей точки

$$x_k^{(1)} = x_0 + vt_k^{(1)} = x_0 + v\left(\frac{x_0}{c-v} + \frac{c-u}{c-v}k\tau\right) = \frac{c}{c-v}x_0 + v\frac{c-u}{c-v}k\tau. \tag{5}$$

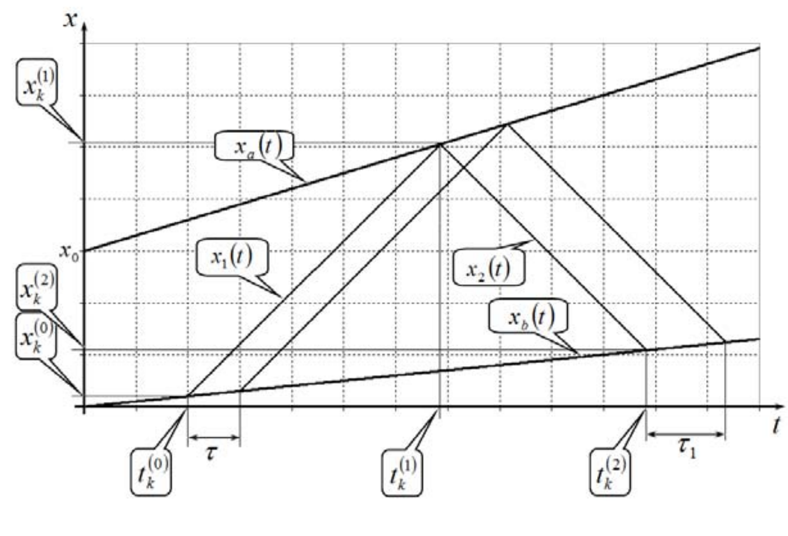
После отражения импульс движется в противоположном направлении по закону

$$\begin{aligned} x_2(t) &= x_k^{(1)} - c\left(t - t_k^{(1)}\right) = \frac{c}{c-v}x_0 + v\frac{c-u}{c-v}k\tau - c\left(t - \frac{x_0}{c-v} - \frac{c-u}{c-v}k\tau\right) \\ &= 2\frac{c}{c-v}x_0 + \frac{(c+v)(c-u)}{c-v}k\tau - ct \end{aligned}. \tag{6}$$

Для определения координаты первого автомобиля и момента времени, когда будет зарегистрирован отраженный сигнал, необходимо решить уравнение $x_2(t) = x_b(t)$:

$$\begin{aligned} &2\frac{c}{c-v}x_0 + \frac{(c+v)(c-u)}{c-v}k\tau - ct = ut \quad \Rightarrow \\ &t_k^{(2)} = 2\frac{c}{(c-v)(c+u)}x_0 + \frac{(c+v)(c-u)}{(c-v)(c+u)}k\tau, \qquad . \\ &x_k^{(2)} = u\left(2\frac{c}{(c-v)(c+u)}x_0 + \frac{(c+v)(c-u)}{(c-v)(c+u)}k\tau\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Графики найденных законов движения автомобилей и импульсов показаны на рисунке.



**1.3** Время между приходами двух последовательных импульсов

$$\tau_1 = t_{k+1}^{(2)} - t_k^{(2)} = \frac{(c+v)(c-u)}{(c-v)(c+u)}\tau \qquad (8)$$

При $u, v << c$ выражение (8) упрощается

$$\tau_1 = \frac{(c+v)(c-u)}{(c-v)(c+u)}\tau \approx \left(1 + 2\frac{v-u}{c}\right)\tau . \qquad (9)$$

**1.4** Относительное изменение интервала между импульсами равно

$$\frac{\Delta\tau}{\tau} = 2\frac{v-u}{c} \qquad (10)$$

Если разность скоростей составляет величину порядка 30м/с ( т.е. около100 км/час ), то относительное изменение интервала составляет $2\cdot 10^{-7}$, что, скорее всего, не может быть зарегистрировано.

**Часть 2. Гармоническая локация.**

**2.1** За период одного колебания волна проходит расстояние, $cT_0$, а автомобиль - $uT_0$. Разность между этими расстояниями и будет равна длине распространяющейся волны

$$\lambda_1 = cT_0 - uT_0 = (c-u)\frac{\lambda_0}{c} . \qquad (11)$$

Время между отражениями двух максимумов волны от движущегося автомобиля можно рассчитать по формуле

$$T_1 = \frac{\lambda_1}{c-v} = \frac{c-u}{c-v}\frac{\lambda_0}{c} = \frac{c-u}{c-v}T_0 . \qquad (12)$$

Длина отраженной волны рассчитывается по формуле аналогичной формуле (11)

$$\lambda_2 = cT_0 + uT_0 = (c+u)T_1 = (c+v)\frac{c-u}{c-v}T_0 . \qquad (13)$$

**2.2** По аналогии с формулой (12) запишем интервал между приемами максимумов отраженной волны движущимся локатором

$$T_2 = \frac{\lambda_2}{c+u} = \frac{c+v}{c+u}\cdot\frac{c-u}{c-v}T_0 . \qquad (14)$$

Следовательно, частота принятого сигнала равна

$$\nu_2 = \frac{c-v}{c-u}\cdot\frac{c+u}{c+v}\nu_0 \approx \left(1 - 2\frac{v-u}{c}\right)\nu_0 \qquad (15)$$

Относительное изменение частоты определяется по формуле

$$\frac{\nu_2 - \nu_0}{\nu_0} = -2\frac{v-u}{c} , \qquad (16)$$

Что совпадет с формулой (10), полученной в первой части.

**Часть 3. Реальные измерения.**

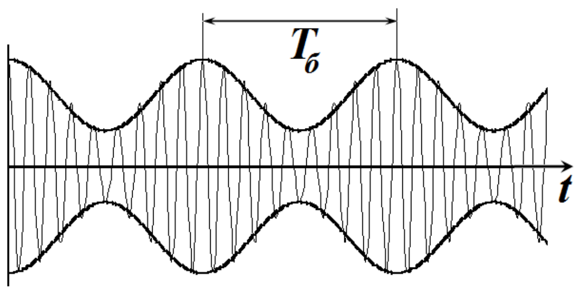
При сложении двух колебаний близких частот возникают биения, которые описываются функцией

$$u(t) = u_0(t) + u_2(t) = A\cos\omega_0 t + A\cos\omega_2 t = 2A\cos\left(\frac{\omega_0 + \omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_0 - \omega_2}{2}t\right), \qquad (17)$$

Эта функция представляет собой произведение двух функция: быстроменяющейся со средней частотой и медленно меняющейся с частотой равной половине разности частот исходных колебаний.

Следовательно, можно считать, что медленно меняющаяся функция описывает изменение амплитуды колебаний

$$A_\Sigma(t) = 2A\cos\left(\frac{\omega_0 - \omega_2}{2}t\right). \qquad (18)$$




Схематический график результата сложения показан на рисунке.
Частота биений определяется по формуле

$$\omega_б = \left|\frac{\omega_0 - \omega_2}{2}\right| = \pi(\nu_0 - \nu_2) = 2\pi\frac{v-u}{c}\nu_0, \qquad (19)$$

а их период равен

$$T_б = \frac{2\pi}{\omega_б} = \frac{c}{|v-u|}\frac{1}{\nu_0}. \qquad (20)$$

**3.2** Из формулы (20) следует, что относительная скорость движения автомобилей может быть рассчитана следующим образом

$$|v-u| = \frac{c}{\nu_0 T_б}. \qquad (21)$$

Эта скорость не является мгновенной, так как для измерения периода биений должно пройти время, по крайней мере, равное этому периоду.
При указанных численных значениях параметров период биений равен

$T_б = \dfrac{\lambda_0}{|v-u|} = \dfrac{0{,}20\,м}{100\dfrac{10^3\,м}{3{,}6\cdot 10^3\,с}} = 7{,}2\cdot 10^{-3}\,с$, и может быть достаточно просто измерен.

**3.3** Относительное смещение автомобилей равно примерно равно длине волны посылаемого сигнала.