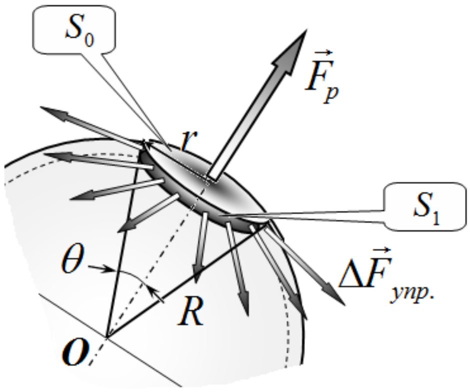
Задача 11- 2. Сферический баллон.

Часть 1. Деформация баллона.



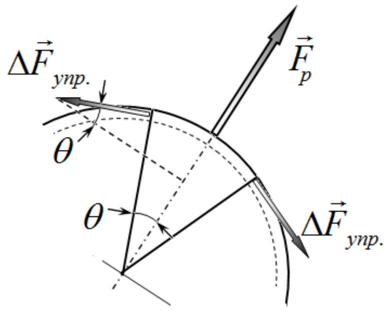
Выделим на поверхности оболочки малую круглую площадку радиуса r, видимую из центра сферической оболочки под малым углом θ. Очевидно, что $r = R\theta$. Сила давления газа на эту площадку равна

$$F_p = \Delta p S_0 = \Delta p \cdot \pi r^2 = \Delta p \pi R^2 \theta^2 \qquad (1)$$

(здесь $S_0 = \pi r^2 = \pi R^2\theta^2$ - площадь выделенной площадки; Δp- разность давлений газов внутри и снаружи баллона) и направлена радиально от центра оболочки. Эта сила уравновешивается силами упругости, возникающими в оболочке при ее деформации. Эти силы действуют по нормали к торцевому сечению выделенного участка, то есть по касательной к его поверхности. Сила упругости, действующая на малый элемент сечения ΔS_1, равна

$$\Delta F_{упр.} = \varepsilon E \cdot \Delta S_{1i}, \qquad (2)$$

где $\varepsilon = \dfrac{\Delta R}{R_0}$ - относительная деформация оболочки, одинаковая во всех ее точках.



Для вычисления векторной суммы всех сил упругости необходимо учесть, что они направлены под углом θ к радиальному направлению, следовательно, суммарная сила упругости будет направлена к центру сферы. Суммируя проекции сил упругости на радиальное направление, получим

$$F_{упр.} = \sum_i \Delta F_{упр.i} \cdot \theta = \varepsilon E\theta \sum_i \Delta S_{1i} = \varepsilon E\theta \cdot S_1, \qquad (3)$$

где $S_1 = \sum_i \Delta S_{1i} = 2\pi rh = 2\pi R\theta h$ - площадь торцевой поверхности выделенного элемента. Таким образом, с учетом выражения для относительной деформации, выражение для суммарной силы упругости приобретает вид

$$F_{упр.} = \varepsilon E\theta \cdot S_1 = \frac{\Delta R}{R_0} E\theta \cdot 2\pi R\theta h = 2\pi RhE\frac{\Delta R}{R_0}\cdot\theta^2 \qquad (4)$$

Приравнивая эту силу к силе давления (1), получим уравнение

$$2\pi RhE\frac{\Delta R}{R_0}\cdot\theta^2 = \Delta p\pi R^2\theta^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2Eh}{R_0+\Delta R}\frac{\Delta R}{R_0} = \Delta p \qquad (5)$$

Это уравнение может быть решено точно. Однако следует надеяться, что его деформация мала, поэтому можно решать приближенным, но более простым способом. Для этого ще раз перепишем уравнение в виде

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{R_0\Delta p}{2Eh}\left(1+\frac{\Delta R}{R_0}\right) \qquad (6)$$

И оценим входящий в него безразмерный параметр (которому можно приписать даже определенный физический смысл):

$$\beta = \frac{R_0\Delta p}{2Eh} = \frac{1{,}0\cdot 1{,}0\cdot 10^6}{2\cdot 2{,}1\cdot 10^{11}\cdot 1{,}0\cdot 10^{-3}} \approx 2{,}4\cdot 10^{-3}. \qquad (7)$$

Этот параметр действительно много меньше единицы, поэтому уравнение (6) имеет решение

$$\varepsilon = \beta(1+\varepsilon) \approx \beta \quad \Rightarrow \quad \Delta R = \beta R_0 \approx 2{,}4\,мм\,. \tag{8}$$

Отметим, что погрешность решения имеет порядок $\beta^2 \approx 5\cdot 10^{-6}$. Решать с такой точностью не позволяют заданные точности исходных данных.

1.2 Баллон разорвется, если механическое напряжение его стенок превысит предел прочности $\sigma_{пр.}$. На пределе прочности сила результирующая сила упругости, действующая на выделенную площадку (как п.1.1) определяется формулой

$$F_{упр.} = \sigma_{пр.}\theta \cdot S_1 = 2\pi Rh\sigma_{пр.}\theta^2\,. \tag{9}$$

Приравнивая ее к силе давления газа (1), получим уравнения для определения избыточного давления, решение которого дает требуемый результат

$$\Delta p\pi R^2\theta^2 = 2\pi Rh\sigma_{пр.}\theta^2 \quad \Rightarrow$$
$$\Delta p_{\max} = \frac{2\sigma_{пр.}h}{R} \approx \frac{2\sigma_{пр.}h}{R_0} \approx \frac{2\cdot 5{,}6\cdot 10^8\cdot 1{,}0\cdot 10^{-3}}{1{,}0} \approx 1{,}1\cdot 10^6\,Па\,. \tag{10}$$

Следовательно, максимальное давление в баллоне на одну атмосферу больше: $p_{\max} \approx 1{,}2\cdot 10^6\,Па$.

Массу газа в баллоне определяем из уравнения Менделеева-Клапейрона

$$PV = \frac{m}{M}R_\Gamma T \quad \Rightarrow \quad m = \frac{PVM}{R_\Gamma T} = \frac{1{,}2\cdot 10^6\,\frac{4}{3}\pi(1{,}0)^3\cdot 32\cdot 10^{-3}}{8{,}31\cdot 293} \approx 2{,}0\,кг\,. \tag{11}$$

Часть 2.

Наиболее простой способ определения частоты колебаний состоит в использовании закона сохранения энергии. Можно показать, что плотность энергии упругих деформаций определяется по формуле $w = \frac{1}{2}E\varepsilon^2$. Тогда для колеблющейся оболочки закон сохранения энергии принимает вид

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{1}{2}E\varepsilon^2 V = const\,. \tag{12}$$

где V - объем оболочки (а не баллона). Учитывая, что $\varepsilon = \frac{\Delta R}{R_0}$, а $v = \frac{\Delta R}{\Delta t}$, запишем

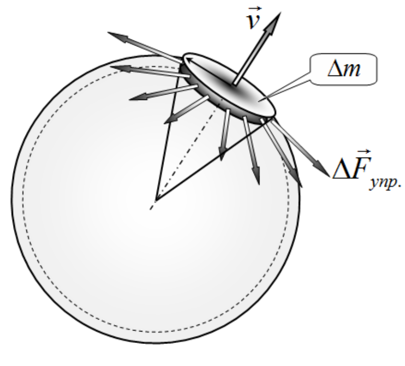
$$\frac{\rho V v^2}{2} + \frac{1}{2}E\left(\frac{\Delta R}{R_0}\right)^2 V = const \quad \Rightarrow \quad \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2}\frac{E}{\rho R_0^2}(\Delta R)^2 = const\,. \tag{13}$$

А это есть уравнение гармонических колебаний с частотой, равной

$$\omega_0^2 = \frac{E}{\rho R_0^2} \quad \Rightarrow \quad \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E}{\rho R_0^2}} \approx \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2{,}1\cdot 10^{11}\,Па}{7{,}9\cdot 10^3\,\frac{кг}{м^3}1{,}0\,м^2}} \approx 8{,}0\cdot 10^2\,Гц\,. \tag{14}$$

Возможен и более традиционный путь решения – на основании уравнения второго закона Ньютона, записанного для малого выделенного элемента участка оболочки.

$$\Delta m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -F_{упр.} \tag{15}$$



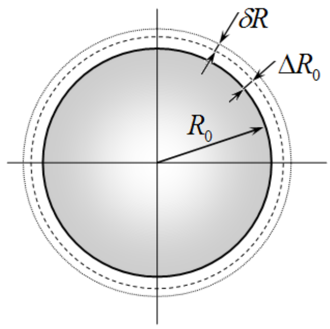
Масса выделенного элемента равна

$$\Delta m = 2\pi R_0^2 \theta^2 h\rho \tag{16}$$

Подставляя полученное ранее выражение для силы упругости (4), получим

$$2\pi R_0^2 \theta^2 h\rho \frac{\Delta v}{\Delta t} = -2\pi RhE\frac{\Delta R}{R_0}\cdot\theta^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{E}{\rho R_0^2}\Delta R \tag{15}$$

Полученное уравнение также является уравнением гармонических колебаний с частотой, определяемой формулой (14).
Заметим, что использование уравнения типа (15) предполагает пренебрежение всеми членами, имеющими второй порядок малости по смещению выделенного элемента.



2.2 Заполнение баллона газом изменяет частоту радиальных колебаний по двум причинам: первое – изменяется радиус баллона; второе – на стенки баллона действует дополнительная изменяющаяся сила давления газа[1]. Чтобы учесть оба этих фактора представим изменение радиуса баллона в виде двух слагаемых: ΔR_0 - изменение радиуса баллона под действием давления газа в состоянии равновесия и определяемое формулой (8); δR - еще более малое отклонение от равновесного значения, возникающее в ходе колебаний.

Итак, уравнение второго закона Ньютона для выделенного элемента оболочки в данном случае приобретает вид

$$2\pi R_0^2 \theta^2 h\rho \frac{\Delta v}{\Delta t} = -2\pi RhE\frac{\Delta R}{R_0}\cdot\theta^2 + p\cdot\pi R^2\theta^2 \tag{16}$$

Здесь p - изменяющееся давление газа в баллоне. Его зависимость от радиуса баллона определяется уравнением адиабатного процесса

$$p_0 V_0^\gamma = pV^\gamma \quad \Rightarrow \quad p = p_0\left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma = p_0\left(\frac{R_0+\Delta R_0}{R_0+\Delta R_0+\delta R}\right)^{3\gamma} \tag{17}$$

Подставим это выражение в уравнение (16) и после сокращений получим

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{E}{R_0^2\rho}\left(R_0+\Delta R_0+\delta R\right)\frac{\Delta R_0+\delta R}{R_0} + \frac{p_0}{2R_0^2 h\rho}\left(\frac{R_0+\Delta R_0}{R_0+\Delta R_0+\delta R}\right)^{3\gamma}\left(R_0+\Delta R_0+\delta R\right)^2 \tag{18}$$

Прежде всего, в этом уравнении необходимо провести разложения по «самой величине» δR, оставляя только величины первого порядка. Приведем эти выкладки подробно

$$\begin{aligned}&\left(R_0+\Delta R_0+\delta R\right)\frac{\Delta R_0+\delta R}{R_0} = \left(R_0+\Delta R_0\right)\frac{\Delta R_0}{R_0} + \delta R\left(\frac{\Delta R_0+R_0+\Delta R_0}{R_0}\right) = \\ &= \left(R_0+\Delta R_0\right)\frac{\Delta R_0}{R_0} + \delta R\left(1+2\frac{\Delta R_0}{R_0}\right)\end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{R_0+\Delta R_0}{R_0+\Delta R_0+\delta R}\right)^{3\gamma}\left(R_0+\Delta R_0+\delta R\right)^2 = \left(R_0+\Delta R_0\right)^2\left(1+\frac{\delta R}{R_0+\Delta R_0}\right)^{2-3\gamma} \approx \\ &\approx \left(R_0+\Delta R_0\right)^2\left(1-\left(3\gamma-2\right)\frac{\delta R}{R_0+\Delta R_0}\right) \approx \left(R_0+\Delta R_0\right)^2 - \left(3\gamma-2\right)\left(R_0+\Delta R_0\right)\delta R\end{aligned} \tag{19}$$

---

[1] Строго говоря, при расчете колебаний стенок необходимо учитывать распространение упругих волн в газе внутри баллона (звуковые волны). Однако, мы упростим ситуацию и будем считать, что давление во всем объеме изменяется мгновенно во всех точках (так, называемое квазистационарное приближение).

Подстановка полученных выражений в уравнение (18) дает

$$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\left(-\frac{E}{R_0^2\rho}\left(R_0+\Delta R_0\right)\frac{\Delta R_0}{R_0}+\frac{p_0}{2R_0^2h\rho}\left(R_0+\Delta R_0\right)^2\right)-$$
$$-\left(\frac{E}{R_0^2\rho}\left(1+2\frac{\Delta R_0}{R_0}\right)+\frac{p_0}{2R_0^2h\rho}(3\gamma-2)\left(R_0+\Delta R_0\right)\right)\delta R \tag{20}$$

Первое слагаемое в этом уравнении определяет условие равновесия

$$-\frac{E}{R_0^2\rho}\left(R_0+\Delta R_0\right)\frac{\Delta R_0}{R_0}+\frac{p_0}{2R_0^2h\rho}\left(R_0+\Delta R_0\right)^2=0 \tag{21}$$

Заметим, что это уравнение было решено ранее – равновесное значение увеличения радиуса баллона дается формулой (8). Коэффициент при втором δR равен квадрату круговой частоты колебаний баллона. Преобразуем его, оставляя только величины первого порядка малости теперь по ΔR

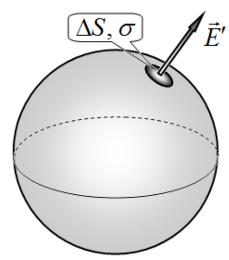
$$\begin{aligned}&\left(\frac{E}{R_0^2\rho}\left(1+2\frac{\Delta R_0}{R_0}\right)+\frac{p_0}{2R_0^2h\rho}(3\gamma-2)\left(R_0+\Delta R_0\right)\right)=\\&=\frac{E}{R_0^2\rho}\left(1+2\frac{\Delta R_0}{R_0}+\frac{p_0R_0}{2Eh}(3\gamma-2)\left(1+\frac{\Delta R_0}{R_0}\right)\right)=\\&=\omega_0^2\left(1+2\frac{\Delta R_0}{R_0}+\beta(3\gamma-2)\left(1+\frac{\Delta R_0}{R_0}\right)\right)\end{aligned} \tag{22}$$

Здесь $\beta=\frac{R_0\Delta p}{2Eh}\approx 2{,}4\cdot 10^{-3}$ введенный и рассчитанный ранее параметр. Учитывая, что относительная деформация баллона в состоянии равновесия также равна β в выражении (7) можно пренебречь малыми величинами второго порядка:

$$\omega_0^2\left(1+2\frac{\Delta R_0}{R_0}+\beta(3\gamma-2)\left(1+\frac{\Delta R_0}{R_0}\right)\right)\approx\omega_0^2\left(1+2\beta+\beta(3\gamma-2)\right)=\omega_0^2\left(1+3\gamma\beta\right) \tag{23}$$

Таким образом, частота колебаний и ее относительное изменение оказываются равными $\nu=\nu_0\sqrt{1+3\gamma\beta}\approx\nu_0\left(1+\frac{3\gamma}{2}\beta\right) \quad\Rightarrow\quad \frac{\Delta\nu}{\nu_0}\approx\frac{3\gamma}{2}\beta\approx 5\cdot 10^{-3}$, то есть всего 0,5%.

Часть 3. Электрический заряд.



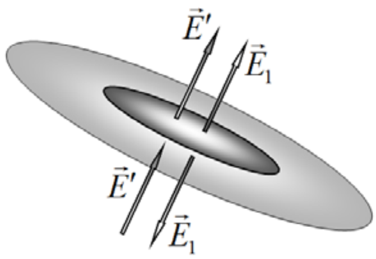
3.1 На малую площадку ΔS на поверхности внешней сферы со стороны остальных зарядов сферы действует сила

$$\Delta F=E'\sigma\Delta S\,, \tag{24}$$

где σ - поверхностная плотность зарядов на сфере, E' - напряженность электрического поля, создаваемого всеми зарядами сферы, кроме тех, которые находятся на выделенной площадке.

Для определения напряженности поля E' воспользуемся следующими рассуждениями. Суммарное поле с внешней стороны площадки равно (поле равномерно заряженной сферы)

$$E_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R^2} \tag{25}$$



и может быть представлено в виде двух слагаемых $\vec{E}_0=\vec{E}'+\vec{E}_1$, ($\vec{E}_1$ - напряженность поля, создаваемого зарядами на выделенной площадке). С внутренне стороны под площадкой эти векторы направлены противоположно и их сума равна нулю (так как поле внутри проводника отсутствует). Откуда следует. что искомая напряженность E' в два раза меньше суммарной напряженности поля у поверхности сферы

$$\vec{E}' - \vec{E}_1 = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad E' = E_1 = \frac{1}{2}E_0 \tag{24}$$

Записанные выражения позволяют рассчитать давление электрического поля на поверхность сферы

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S} = E'\sigma = \frac{1}{2}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{q}{4\pi R^2} = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4} \tag{25}$$

Далее можно воспользоваться уравнением (10), заменив в нем давление газа на найденное давление электрического поля:

$$\frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R_0^4} = \frac{2\sigma_{пр.}h}{R_0} \tag{26}$$

Теперь без труда находим максимально возможный заряд сферы

$$\begin{aligned} q_{\max} &= \sqrt{64\pi^2\varepsilon_0 R_0^3\sigma_{пр.}h} = 8\pi R_0\sqrt{\varepsilon_0\sigma_{пр.}R_0 h} \approx \\ &\approx 8\pi\cdot 1{,}0^2\sqrt{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 5{,}6\cdot 10^8\cdot 1{,}0\cdot 1{,}0\cdot 10^{-3}} \approx 5{,}6\cdot 10^{-2}\,Кл \end{aligned}. \tag{27}$$

Часть 4. Рентгеновское освещение.

Причиной возможного увеличения радиуса шара является фотоэффект, в результате которого шар приобретает положительный электрический заряд.

4.1 Энергия гамма-кванта рассчитывается по формуле

$$w = \frac{hc}{\lambda e} = \frac{6{,}63\cdot 10^{-34}\cdot 3{,}0\cdot 10^8}{2{,}0\cdot 10^{-10}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}} = 6{,}2\cdot 10^3\,Эв\,. \tag{28}$$

4.2 Энергия кванта значительно превышает работу выхода, поэтому последняя может быть опущена в уравнении Эйнштейна для фотоэффекта:

$$e\varphi = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda_{кр.}} \quad \Rightarrow \frac{eq}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{hc}{\lambda}\,. \tag{29}$$

Из этого уравнения определяем максимальный заряд оболочки

$$q = 4\pi\varepsilon_0 R\frac{hc}{\lambda e} = 4\pi\varepsilon_0 Rw \tag{30}$$

и давление электрического поля на оболочку.

$$p = \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4} = \frac{(4\pi\varepsilon_0 Rw)^2}{32\pi^2\varepsilon_0 R^4} = \frac{\varepsilon_0 w^2}{2R^2} \tag{31}$$

Наконец, воспользуемся полученной ранее формулой для расчета относительного увеличения радиуса шара (8):

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \frac{R_0}{2Eh}\frac{\varepsilon_0 w^2}{2R_0^2} = \frac{\varepsilon_0 w^2}{4EhR_0} = \frac{8{,}82\cdot 10^{-12}\left(6{,}2\cdot 10^3\right)^2}{4\cdot 2{,}1\cdot 10^{11}\cdot 1{,}0\cdot 10^{-3}} = 4{,}0\cdot 10^{-13} \tag{32}$$

Таким образом, рассчитанное увеличение радиуса шара меньше размера атома, поэтому в принципе не наблюдаемо.