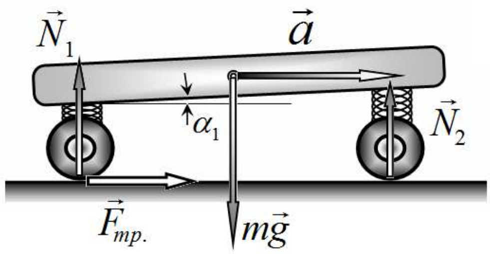
10 класс.

Задача 10. 1. Лихач (не задирай носа)

Часть 1. Поехали - старт и разгон.

1.1-1.3 *На первый взгляд, ответы на первую часть задачи находятся элементарно: автомобиль разгоняет сила трения, которая на горизонтальной дороге равна* μmg. *Однако, этот ответ не верен! Ведущими колесами являются только задние колеса, поэтому необходимо учитывать силу трения, действующую только на эти колеса. Это приводит к необходимости более подробного рассмотрения.*

На рис. 1 изображены внешние силы, действующие на автомобиль во время его разгона. Понятно, что единственной горизонтальной силой, сообщающей ускорение автомобилю, является сила трения $\vec{F}_{тр.}$, действующая со стороны дороги на задние ведущие колеса автомобиля. По закону Кулона-Амонтона эта сила равна



$$F_{тр.} = \mu N_1, \tag{1}$$

где N_1 - сила нормальной реакции, действующая на задние колеса.

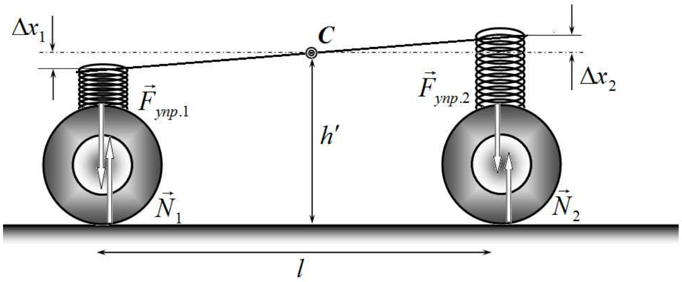
Не смотря на то, что центр масс нашего автомобиля находится на его середине, нагрузка на дорогу во время ускоренного движения распределяется неравномерно между колесами. Для определения сил запишем уравнения:
второго закона Ньютона для автомобиля в проекции на вертикальное направление:

$$N_1 + N_2 = mg, \tag{2}$$

здесь N_2 - сила реакции, действующая на передние колеса;
условие равенства нулю моментов сил относительно центра масс автомобиля:

$$F_{тр.} \cdot h' + N_2 \frac{l}{2} - N_1 \frac{l}{2} = 0, \tag{3}$$

где h' - высота центра масс автомобиля над дорогой в процессе разгона. Так как корпус автомобиля при разгоне наклоняется, то не очевидно, что эта высота не изменяется. Возможное изменение высоты центра масс можно найти, рассматривая деформации пружин подвески (рис. 2). Обозначим $\Delta x_1, \Delta x_2$ - дополнительные (к величине x_0) деформации задней и передней подвески. Так как в вертикальном направлении колеса не движутся, то силы упругости, действующие на колеса, уравновешиваются силами реакции со стороны дороги (массой колес пренебрегаем), поэтому с учетом закона Гука можно записать



$$\begin{aligned} N_1 &= F_{упр.1} = k(x_0 + \Delta x_1) \\ N_2 &= F_{упр.2} = k(x_0 + \Delta x_2) \end{aligned}. \tag{4}$$

Теперь с использованием уравнения (2) и очевидного соотношения для покоящегося автомобиля $mg = 2kx_0$, получим

$$k(x_0 + \Delta x_1) + k(x_0 + \Delta x_2) = 2kx_0, \tag{5}$$

откуда следует, что

$$\Delta x_2 = -\Delta x_1, \tag{6}$$

то есть, на сколько сожмется задняя подвеска, на столько же поднимется передняя. В этом случае, как следует из рис. 2, высота центра масс автомобиля не изменяется, то есть

$$h' = h\,. \tag{7}$$

Кроме того, угол наклона кузова автомобиля может быть выражен из деформации пружин посредством соотношения

$$\alpha_1 = 2\frac{\Delta x_1}{l}, \tag{8}$$

где величина деформации выражается из уравнений (4)

$$\Delta x_1 = \frac{N_1 - N_2}{2k} = x_0\frac{N_1 - N_2}{mg}. \tag{9}$$

Вернемся к системе уравнений (1)-(3), так как мы показали, что $h' = h$, то эта система из трех уравнений содержит три неизвестных величины (сила трения и силы реакций), поэтому может быть решена.

Перепишем уравнения (3) и (2) в виде

$$\begin{aligned} N_1 - N_2 &= F_{тр.}\cdot\frac{2h}{l}, \\ N_1 + N_2 &= mg \end{aligned} \tag{10}$$

и сложим их, в результате получим

$$N_1 = \frac{1}{2}\left(mg + F_{тр.}\cdot\frac{2h}{l}\right). \tag{11}$$

Подставим это выражение в уравнение (1)

$$F_{тр.} = \mu\frac{1}{2}\left(mg + F_{тр.}\cdot\frac{2h}{l}\right)$$

из которого находим

$$F_{тр.} = \frac{\mu mg}{2\left(1-\mu\dfrac{h}{l}\right)}. \tag{12}$$

Ускорение автомобиля найдем с помощью второго закона Ньютона:

$$F_{\text{тр.}} = ma_1 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mu mgl}{2(l-\mu h)} = ma_1 \quad\Rightarrow\quad a_1 = \frac{\mu gl}{2(l-\mu h)}. \tag{13}$$

Проведем вычисления. Если водитель стартует так, что колеса не проскальзывают, то максимальное ускорение достигается при максимальном коэффициенте трения покоя, $\mu = \mu_{\text{п}}$. В результате:

$$a_{1,\text{п}} = \frac{0{,}90\cdot 9{,}81\cdot 3{,}5}{2\cdot(3{,}5 - 0.90\cdot 0{,}40)} = 4{,}9\left(\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\right). \tag{14}$$

Модуль скорости, которой достигнет автомобиль при максимальном ускорении:

$$\upsilon_1 = a_{\max}\Delta t = 4{,}9\cdot 5{,}0 = 24{,}5\left(\frac{\text{м}}{\text{с}}\right) = 89\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}. \tag{15}$$

Наконец, последовательно подставляя «снизу вверх» от формулы (12) в (10), (9), (8) Находим угол наклона корпуса автомобиля

$$\alpha_1 = \frac{2\mu\, x_0 h}{(l-\mu h)}. \tag{16}$$

Подстановка численных значений дает результат

$$\alpha_1 = \frac{2\mu_{\text{п}} x_0 h}{l(l-\mu_{\text{п}} h)} = \frac{2\cdot 0{,}90\cdot 0{,}10\cdot 0{,}40}{3{,}5(3{,}5 - 0{,}90\cdot 0{,}40)} = 0{,}00655\,(\text{рад}) = 0{,}38^\circ$$

1.4 Если водитель «рвет с места», то коэффициент трения – это коэффициент трения скольжения, $\mu = \mu_c$. В результате его ускорение оказывается меньше

$$a_{1,c} = \frac{0{,}80 \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}5}{2 \cdot (3{,}5 - 0.80 \cdot 0{,}40)} = 4{,}3\left(\frac{м}{с^2}\right). \qquad (13)$$

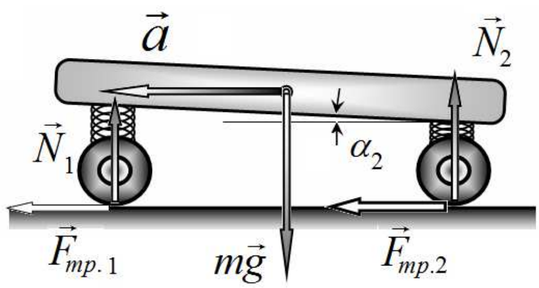
Однако, если учесть, что колеса и особенно задний мост имеют определенный момент инерции, то в такой ситуации момент сил, будет отличным от нуля. В этом случае момент силы, действующей на корпус автомобиля со стороны двигателя, может стать таким, что весь вес автомобиля придется на задние колеса (передние колеса оторвутся от земли). В этом случае ускоряющая сила трения может достичь величины $\mu_c mg$, а ускорение станет равным $\mu_c g = 8{,}0\frac{м}{с}$.

<u>Примечание - пояснение.</u> Задачу можно решать, рассматривая не весь автомобиль целиком, а только его корпус. На ведущие колеса автомобиля со стороны механизма, связанного с двигателем, действует момент сил $M_к$, вращающий их по часовой стрелке вокруг оси O_1 колесной пары. Если пренебречь массой (моментом инерции), колес, то такой же по модулю, но противоположно направленный момент сил $M_{дв} = M_к$ действует на автомобиль, разворачивающий его против часовой стрелки.

Часть 2 Приехали – торможение и остановка.

2.1 При резком торможении, когда вращение колес прекращается, тормозящей силой является суммарная сила трения, действующая на колеса автомобиля. Так коэффициенты трения передних и задних колес одинаковы, то

$$F_{тр.1} + F_{тр.2} = \mu(N_1 + N_2) = \mu mg \qquad (18).$$



Поэтому модуль ускорения, с которым тормозит автомобиль, равен

$$a = \frac{F_{тр.1} + F_{тр.2}}{m} = \mu g\ . \qquad (19)$$

Тормозной путь автомобиля может быть рассчитан по кинематической формуле

$$S = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\mu g}. \qquad (20)$$

Подстановка численных значений (конечно, надо брать коэффициент трения скольжения) приводит к результату

$$s = \frac{\upsilon_0^2}{2\mu_c g} = \frac{25^2}{2 \cdot 0{,}80 \cdot 9{,}81} = 40\,(м)\ . \qquad (21)$$

2.2 Так как «геометрия автомобиля» не изменилась, то для расчета его угла наклона можно воспользоваться ранее полученными формулами (8)-(9), с заменой индексов

$$\alpha_2 = 2\frac{\Delta x_2}{l} = 2x_0\frac{N_2 - N_1}{mgl}. \qquad (22)$$

Для определения разности сил реакций в данном случае также следует воспользоваться уравнением моментов относительно центра масс автомобиля

$$(F_{тр.1} + F_{тр.2})h + N_1\frac{l}{2} - N_2\frac{l}{2} = 0 \qquad (23)$$

Из которого следует, что

$$N_2 - N_1 = \left(F_{тр.1} + F_{тр.2}\right)\frac{2h}{l} = \mu mg\,\frac{2h}{l}\,. \qquad (24)$$

Таким образом, получаем, что угол наклона корпуса автомобиля при торможении рассчитывается по формуле

$$\alpha_2 = 2x_0\,\frac{N_2 - N_1}{mgl} = 4\mu\,\frac{hx_0}{l^2}\,. \qquad (25)$$

Подстановка численных значений дает

$$\alpha_2 = \frac{4\mu_с x_0 h}{l^2} = \frac{4\cdot 0{,}80\cdot 0{,}10\cdot 0{,}40}{3{,}5^2} = 0{,}010\ (\text{рад}) = 0{,}60^\circ\,. \qquad (26)$$

2.3 Тормозной путь можно уменьшить так, чтобы колеса тормозили так, чтобы не было проскальзывания. В этом случае сила трения будет определяться коэффициентом трения покоя. Расчет по формуле (20) в этом случае приводит к результату

$$s' = \frac{\upsilon_x^2}{2\mu_п g} = \frac{25^2}{2\cdot 0{,}90\cdot 9{,}81} = 35(\text{м})\,. \qquad (27)$$

Возможно, 5 м спасут чью-то жизнь.