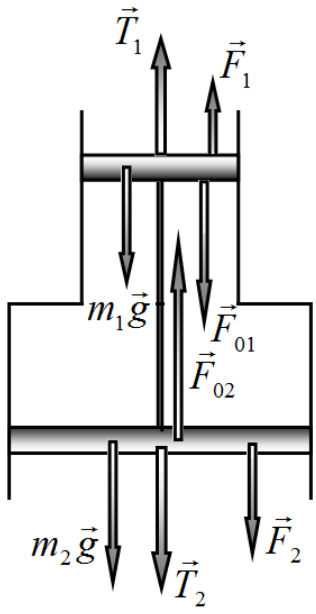
Задача 10.2. Две трубы, два поршня, две части…



2.1. 2.2 На рисунке изображены силы, действующие на поршни. Предполагаем, что стержень сжат, если это не так, то в результате решения получим отрицательное значение для силы упругости. Так как расстояние между поршнями мало, то считаем, что давление воздуха между поршнями постоянно по высоте. Так же можно пренебречь массой воздуха между поршнями.

Условия равновесия поршней имеют вид:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_{01} + \vec{T}_1 + m_1\vec{g} = 0, \qquad (1)$$

$$\vec{F}_2 + \vec{F}_{02} + \vec{T}_2 + m_2\vec{g} = 0. \qquad (2)$$

Здесь $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ – силы давления воздуха внутри цилиндров на верхний и нижний поршни поршень (их модули равны $F_1 = pS_1$, $F_2 = pS_2$); $\vec{F}_{01}, \vec{F}_{02}$ - силы атмосферного давления, действующие на поршни (их модули - $F_{01} = p_0 S_1$, $F_{02} = p_0 S_2$);

$m_1\vec{g}$ и $m_2\vec{g}$ – силы тяжести, действующие поршни; $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ – силы взаимодействия со стержнем верхнего и нижнего поршней соответственно, (поскольку стержень невесомый то модули этих сил одинаковы $T_1 = T_2 = T$).

В проекциях на вертикальную ось эти уравнения имеют вид:

$$pS_1 - p_0 S_1 + T - m_1 g = 0, \qquad (3)$$

$$-pS_2 + p_0 S_2 - T - m_2 g = 0. \qquad (4)$$

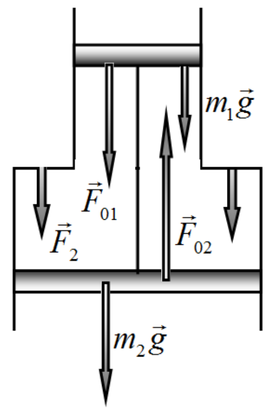
Решая систему уравнений (3) и (4), получим:

$$p = p_0 - \frac{m_1 + m_2}{S_2 - S_1} g; \qquad (5)$$

$$T = \frac{m_1 S_2 + m_2 S_1}{S_2 - S_1} g \qquad (6)$$

Из соотношения (6) следует, что при любых значениях параметров найденная сила упругости положительна, значит исходное предположение о том, что стержень сжат - верно.

После подстановки численных значений получаем $p = 99$ кПа, $T = 5{,}3 H$.



1.3 Очевидными внешними силами, действующими на выделенную систему, являются силы тяжести и силы атмосферного давления. Однако сумма сил атмосферного давления $p_0(S_2 - S_1)$, как следует из формулы (5)

$$p_0(S_2 - S_1) = (m_1 + m_2)g + p(S_2 - S_1). \qquad (7)$$

превышает, силу тяжести поршней!

Причина несоответствия в том, что на газ со стороны стенок действует сила, равная по третьему закону Ньютона силе давления газа. Конечно, сумма этих сил, действующих со стороны боковых стенок равна нулю. Но есть еще сила $\vec{F}_2$, действующая со стороны торца стыка, модуль которой равен $F_2 = p(S_2 - S_1)$. Именно эта сила входит в равенство (7), которое и является условием равновесия выделенной системы.

Вспомните объяснение гидростатического парадокса – сила давления на дно сосуда может быть больше веса налитой в него жидкости.

Заметим, что при правильном понимании физической ситуации уравнение (7) могло быть записано сразу и положено в основу решения данной части задачи.

1.4 Обозначим (p_1, V_1), (p_2, V_2) - давление и объем воздуха между поршнями до и после изменения атмосферного давления, соответственно.
Так как температура не изменилась, то для воздуха внутри труб выполняется закон Бойля-Мариотта

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 . \tag{7}$$

Из уравнения (5) следует, что изменение атмосферного давления на величину Δp приводит к такому же изменению давления между поршнями, поэтому уравнение (7) можно записать в виде

$$p_1 V_1 = (p_2 + \Delta p)(V_1 + \Delta V) \tag{8}$$

Где $V_1 = \frac{l}{2}(S_2 + S_1)$ - объем воздуха до опускания поршней, $\Delta V = \Delta h(S_2 - S_1)$ - его изменение при опускании. Из этого уравнения следует, что изменение давления равно

$$\Delta p = p_1 \frac{V_1}{V_1 + \Delta V} - p_1 = -p_1 \frac{\Delta V}{V_1 + \Delta V} = -\frac{p_1}{\frac{l(S_2 + S_1)}{2\Delta h(S_2 - S_1)} + 1}, \tag{9}$$

где p_1 - подсчитанное ранее давление (5). Подстановка численных значений приводит к результату $\Delta p_0 = 5{,}6\,\text{кПа}$.

Можно еще более упростить решение, если заметить, что относительное изменение объема мало, поэтому мало и относительное изменение атмосферного давления. Тогда из уравнения $PV = const$ *следует* $P\Delta V + \Delta P \cdot V = 0$ *.Отсюда находим* $\Delta P = -P\frac{\Delta V}{V}$*, что совпадает с формулой (9), если в ней пренебречь малой величиной* ΔV *в знаменателе.*

1.5 – 1.6 Так как массы поршней симметрично входят в формулу (5) для давления воздуха между ними, поэтому последние два пункта задачи имеют одинаковые решения. Если верхний поршень опустится до стыка труб, то давление воздуха между поршнями станет равным (из закона Бойля-Мариотта)

$$p_2 = p_1 \frac{V}{V_1} = p_1 \frac{\frac{l}{2}(S_1 + S_2)}{S_2 l} = \frac{p_1}{2}\left(\frac{S_1}{S_2} + 1\right). \tag{10}$$

Изменение давление соответственно равно

$$p_2 - p_1 = \frac{p_1}{2}\left(\frac{S_1}{S_2} + 1\right) - p_1 = -\frac{p_1}{2}\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right). \tag{11}$$

Из уравнения (5) следует, что изменение давления связано с изменением массы поршней соотношением

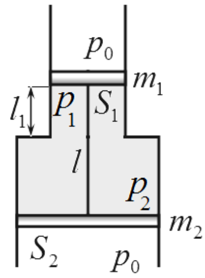
$$\Delta p = -\frac{\Delta m}{S_2 - S_1} g . \tag{12}$$

Приравнивая эти выражения, получим

$$\frac{\Delta m}{S_2 - S_1} g = \frac{p_1}{2}\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta m = \frac{p_1(S_2 - S_1)}{2g}\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) \approx 4{,}5\,кг . \tag{13}$$

Часть 2. Вода.

Ход решения данной части задачи аналогичен решению предыдущей части, с воздухом между поршнями (только результаты получатся противоположными!). Главное отличие заключается в том, что объем воды остается постоянным, поэтому поршни сдвигаться не могут. Кроме того, необходимо учесть изменение давления с высотой (гидростатическое давление).



2.1 Уравнения равновесия поршней аналогичны уравнениям (3)-(4), поэтому перепишем их без особых комментариев

$$p_1S_1 - p_0S_1 + T - m_1g = 0, \quad (14)$$

$$-p_2S_2 + p_0S_2 - T - m_2g = 0. \quad (15)$$

Здесь обозначено: p_1 - давление воды на верхний поршень, $p_2 = p_1 + \rho gl$ - давление воды на нижний поршень.

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$p_1 = p_0 - \frac{(m_1+m_2)g + \rho glS_2}{S_2 - S_1}. \quad (16)$$

$$T = \frac{m_1S_2 + m_2S_1 + \rho lS_1S_2}{S_2 - S_1}g. \quad (17)$$

Из формулы (17) следует, что и в данном случае стержень всегда растянут!

2.2 Когда груз находится на верхнем поршне сила его натяжения равна

$$T_1 = \frac{(m_1+M)S_2 + m_2S_1 + \rho lS_1S_2}{S_2 - S_1}g, \quad (18)$$

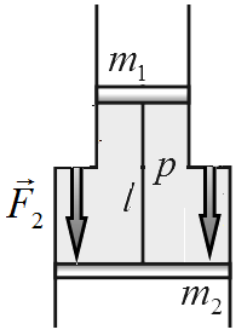
А если его подвесить к нижнему поршню, то она станет равной

$$T_2 = \frac{m_1S_2 + (m_2+M)S_1 + \rho lS_1S_2}{S_2 - S_1}g. \quad (19)$$

Следовательно, изменение этой силы равно

$$T_2 - T_1 = -Mg \quad (20)$$

т.е. уменьшается на силу тяжести груза.



2.3 Помимо сил тяжести и сил атмосферного давления, на воду и поршни действует сила со стороны выступа торца - F_2.

$$F_2 = p'(S_2 - S_1) \quad (22)$$

где $p' = p_1 + \rho gl_1 = p_0 - \dfrac{(m_1+m_2)g + \rho glS_2}{S_2 - S_1} + \rho gl_1$ - давление на уровне стыка труб. Тем самым получаем, что рассматриваемая сила равна

$$\begin{aligned} F_2 &= p'(S_2 - S_1) = \left(p_0 - \frac{(m_1+m_2)g + \rho glS_2}{S_2 - S_1} + \rho gl_1\right)(S_2 - S_1) = \\ &= p_0(S_2 - S_1) - (m_1+m_2)g - \rho glS_2 + \rho gl_1(S_2 - S_1) = \\ &= p_0(S_2 - S_1) - (m_1+m_2)g - \rho g(S_1l_1 + S_2(l - l_1)) \end{aligned} \quad .(23)$$

Последнее слагаемое в этой формуле есть ни то иное, как сила тяжести, действующая на воду. Тем самым мы показали, что система находится в равновесии:

$$p_0(S_2 - S_1) = M_{общ.}g + F_2. \quad (24)$$

где $M_{общ.}$ - общая масса воды и поршней.

2.4 Формально, условие равновесия (24) может выполняться и при отсутствии атмосферного давления, правда при этом и сила F_2 и давление внутри жидкости станут отрицательными – жидкость повиснет на торце! Однако, при уменьшении атмосферного давления будет уменьшаться и давление внутри жидкости. Когда последнее опустится до давления насыщенного пара, жидкость закипит, то есть разорвется. Поэтому в реальности равновесия при отсутствии внешнего давления быть не может.

2.5 Итак условием разрыва жидкости является понижении ее давления до давления насыщенного пара. Минимальное давление жидкости в рассматриваемой системе - у верхнего поршня, поэтому условие разрыва имеет вид

$$p_1 = p_0 - \frac{(m_1 + m_2 + M)g + \rho g l S_2}{S_2 - S_1} = p_{нас.} \qquad (25)$$

При комнатной температуре давление насыщенного пара значительно меньше нормального атмосферного давления $p_{нас.} << p_0$, поэтому приближенно (но с высокой степенью точности) уравнение (25) приводит к уравнению

$$p_0 - \frac{(m_1 + m_2 + M)g + \rho g l S_2}{S_2 - S_1} = 0. \qquad (26)$$

Из которого следует, что максимальная масса груза равна

$$M_{\max} = \frac{p_0 (S_2 - S_1)}{g} - \rho l S_2 - m_1 - m_2. \qquad (27)$$