Задача 10.2 Электронный газ и неоднородный проводник

1.1 Концентрация свободных электронов равна концентрации атомов меди, следовательно:
$n_0 = \frac{N}{V} = \frac{D}{m_{\text{Cu}}}; \quad m_{\text{Cu}} = \frac{M}{N_{\text{A}}} \quad \Rightarrow$

$$n_0 = \frac{DN_{\text{A}}}{\text{M}}; \tag{1}$$

$$n_0 = \frac{8{,}9 \cdot 10^3 \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23}}{6{,}4 \cdot 10^{-2}} = 8{,}4 \cdot 10^{28}\ \text{м}^{-3}. \tag{1′}$$

1.2. Тепловое равновесие означает, что электронному газу можно присвоить температуру, равную температуре меди. В результате:

$$\langle v_{\text{кв.}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m}}; \tag{2}$$

$$\langle v_{\text{кв.}} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} = 1{,}2 \cdot 10^5\ \frac{\text{м}}{\text{с}}. \tag{2′}$$

1.3.

$$\langle v_{\text{кв.}} \rangle = \sqrt{\frac{3kT_e}{m}} \quad \Rightarrow \quad T_e = \frac{m\langle v_{\text{кв.}} \rangle^2}{3k}; \tag{3}$$

$$T_e = \frac{9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot \left(2 \cdot 10^6\right)^2}{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23}} = 8{,}8 \cdot 10^4\ \text{К}. \tag{3′}$$

1.4.

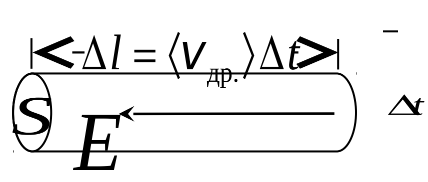
$$p = n_0 k T_e; \tag{4}$$

$$p = 8{,}4 \cdot 10^{28} \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 8{,}8 \cdot 10^4 = 1{,}0 \cdot 10^{11}\ \text{Па} \tag{4′}$$

Это очень большое давление. Однако при его выводе не учитывались положительные ионы кристаллической решетки, взаимодействие с которыми уменьшает давление электронного газа. Полученное значение является парциальным давлением электронного газа, к которому необходимо добавить давление электрического поля, создаваемого положительным зарядом, которое противоположно по знаку.

Часть 2.

2.1. По определению сила тока: $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}; \quad \Delta q = \Delta N e$, где ΔN количество электронов, способных за промежуток времени пересечь поперечное сечение проводника. $\Delta N = n_0 \Delta V$,



$\Delta V = S\Delta l = S\langle v_{\text{др.}} \rangle \Delta t$ (см. рисунок). В итоге:

$\Delta q = n_0 e S \langle v_{\text{др.}} \rangle \Delta t \quad \Rightarrow \quad I = n_0 e S \langle v_{\text{др.}} \rangle \quad \Rightarrow$

$$\langle v_{\text{др.}} \rangle = \frac{I}{n_0 e S}; \tag{5}$$

$$\langle v_{\text{др.}}\rangle = \frac{1}{8{,}4\cdot 10^{28}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 1} = 7{,}4\cdot 10^{-5}\ \frac{\text{м}}{\text{с}}\,. \qquad (5')$$

Это очень малая скорость, особенно по сравнению со скоростью хаотического движения электронов. Тем не менее, с такой скоростью дрейфует много электронов, в результате этого получается заметный ток.

2.2. Для однородного поля:

$$E = \frac{U}{L}\,; \qquad E = 1{,}0\,\frac{\text{В}}{\text{м}}\,. \qquad (6)$$

2.3. Средняя скорость равноускоренного движения из состояния покоя равна $\frac{1}{2}v_{\max}$ и совпадает со средней скоростью дрейфа: $\frac{1}{2}v_{\max} = \langle v_{\text{др.}}\rangle \;\Rightarrow$ (учитывая (5)):

$$v_{\max} = \frac{2I}{n_0 eS}\,. \qquad (7)$$

С другой стороны: $v_{\max} = a\tau$, где ускорение: $a = \frac{eE}{m} = \frac{eU}{mL} \;\Rightarrow$

$$\frac{eU}{mL}\tau = \frac{2I}{n_0 eS} \;\Rightarrow\; I = \frac{n_0 e^2 \tau S}{2mL}U\,. \qquad (8)$$

Сила тока пропорциональна напряжению, это и есть закон Ома. Сопротивление:

$$R = \frac{U}{I} \;\Rightarrow R = \frac{2mL}{n_0 e^2 \tau S}\,. \qquad (9)$$

Сравнивая полученное выражение с формулой $R = \rho_1 \frac{L}{S}$, получим:

$$\rho_1 = \frac{2m}{n_0 e^2 \tau} \;\Rightarrow\; \tau = \frac{2m}{n_0 e^2 \rho_1}\,; \qquad (10)$$

$$\tau = \frac{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}}{8{,}4\cdot 10^{28}\cdot\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^2\cdot 1{,}7\cdot 10^{-8}} = 5{,}0\cdot 10^{-14}\ \text{с}\,. \qquad (10')$$

3.1. Сопротивление первого проводника: $R_1 = \rho_1 \frac{l_1}{S}$, второго − $R_2 = \rho_2 \frac{l_2}{S}$. Сила тока в проводниках: $I_1 = \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{R_1} = \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{\rho_1 l_1}S$; $\quad I_2 = \frac{\varphi_1 - 0}{R_2} = \frac{\varphi_1}{\rho_2 l_2}S$. Поскольку при последовательном соединении сила тока в проводниках одинакова,

$$I_1 = I_2 \;\Rightarrow\; \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{\rho_1 l_1}S = \frac{\varphi_1}{\rho_2 l_2}S \;\Rightarrow\; \varphi_1 = \varphi_0 \frac{\rho_2 l_2}{\rho_1 l_1 + \rho_2 l_2}\,. \qquad (12)$$

При $l_1 = l_2$: $\varphi = \varphi_0 \dfrac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$; $\varphi_1 = 220 \cdot \dfrac{5{,}1 \cdot 10^{-7}}{1{,}7 \cdot 10^{-8} + 5{,}1 \cdot 10^{-7}} = 213$ В.

3.2. Закон Ома: $I = \dfrac{\varphi_0 - \varphi}{R} \Rightarrow \varphi = \varphi_0 - I\rho \dfrac{l}{S}$. Зависимость потенциала φ от длины проводника l линейная, φ равномерно убывает в медном проводнике от φ_0 до φ_1, а в проводнике из константана от φ_1 до 0.

Напряженность поля в каждом проводнике постоянная, однако, на границе соединения проводников претерпевает разрыв, в результате в проводнике из меди $E_1 = \dfrac{\varphi_0 - \varphi_1}{l} = \dfrac{7.0}{l}\left(\dfrac{\text{В}}{\text{м}}\right)$, а в проводнике из константана $E_2 = \dfrac{\varphi_1}{l} = \dfrac{213}{l}\left(\dfrac{\text{В}}{\text{м}}\right)$.

3.4. Совместим ось Ox с осью проводника, поместив начало оси на положительный конец. Удельное сопротивление материала проводника изменяется по закону:

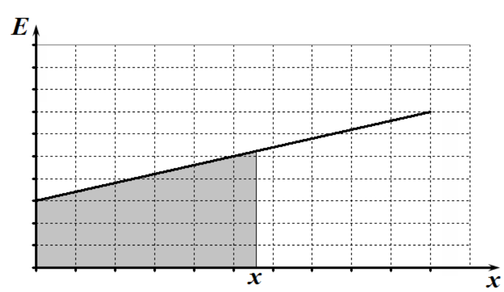
$$\rho = \rho_1\left(1 + \beta \frac{x}{L}\right), \text{ где } \beta = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{5{,}1 \cdot 10^{-7}}{1{,}7 \cdot 10^{-8}} = 30. \qquad (14)$$

Так как сила тока постоянна в любом сечении проводника, то для плотности тока (которая также постоянна) можно записать

$$j = \frac{1}{\rho} E = const. \qquad (15)$$

Откуда следует, что напряженность электрического поля изменяется по закону

$$E = j\rho = j\rho_1\left(1 + \beta \frac{x}{L}\right). \qquad (16)$$



В этой зависимости нам не известна плотность тока, которую можно найти, зная значения потенциалов на концах проводника. Построим график зависимости модуля напряженности от координаты. Площадь под графиком от точки $x = 0$ до некоторого значения x численно равна разности потенциалов между этими точками. Поэтому потенциал в точке с координатой x равен

$$\varphi(x) = U - \frac{1}{2}\left(E(0) + E(x)\right)\cdot x = U - \frac{1}{2} j\rho_1\left(2 + \beta\frac{x}{L}\right)x\,. \qquad (17)$$

Эта функция при $x = L$ должна обращаться в нуль, что и дает возможность определить неизвестную постоянную:

$$U - \frac{1}{2} j\rho_1(2+\beta)L = 0 \quad \Rightarrow \quad j = \frac{U}{\frac{1}{2}\rho_1(2+\beta)L}\,. \qquad (18).$$

Таким образом, получаем окончательное выражение для распределения потенциала

$$\varphi(x) = U - \frac{1}{2} j\rho_1\left(2+\beta\frac{x}{L}\right)x = U - U\,\frac{\left(2+\beta\frac{x}{L}\right)x}{(2+\beta)L}\,. \qquad (19)$$

Если обозначить $\xi = \dfrac{x}{L}$, то эта функция приобретает вполне удобоваримый вид банальной параболы (с учетом $\beta = 30$):

$$\varphi(x) = U\left(1 - \frac{(2+\beta\xi)\xi}{(2+\beta)}\right) = U\left(1 - \frac{(2+30\xi)\xi}{32}\right).$$

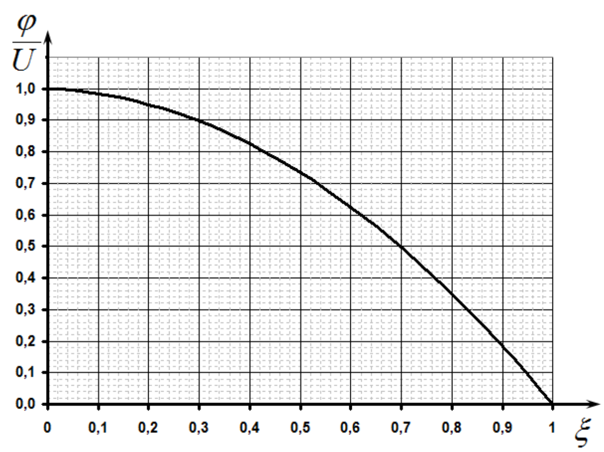


График этой функции показан на следующем рисунке.