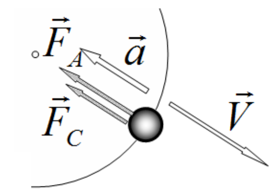
Задача 10.3 Опыты Жана Перрена.



1.1 На частицу во вращающейся жидкости в радиальном направлении действуют сила вязкого трения (сила Стокса) $F_C = 6\pi\eta RV$ и сила Архимеда $\vec{F}_A = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 \omega^2 r$. Эти силы сообщают частице центростремительное ускорение $a = \omega^2 r$. Пренебрегая изменением модуля скорости частицы относительно жидкости. На основании второго закона Ньютона запишем уравнение

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho\omega^2 r = 6\pi\eta RV + \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0 \omega^2 r\,, \tag{1}$$

Из которого находим скорость радиального движения частицы

$$V = \frac{R^2(\rho - \rho_0)\omega^2 r}{9\eta}. \tag{2}$$

Данная задача также может быть решена в неинерциальной вращающейся системе отсчета, связанной с жидкостью.

1.2 Так как скорость частицы пропорциональна квадрату ее радиуса, то при уменьшении радиуса в два раза, скорость уменьшится в 4 раза.

1.3 Подстановка численных значений приводит к результату

$$V = \frac{R^2(\rho - \rho_0)\omega^2 r}{9\eta} = \frac{\left(0{,}212\cdot 10^{-6}\right)^2 м^2 \cdot (1{,}194 - 0{,}998)\cdot 10^3\,\frac{кг}{м^3}\left(2500\,\frac{2\pi}{60}\right)^2 c^{-2}\cdot 0{,}15м}{9\cdot 1{,}005\cdot 10^{-6}\,\frac{кг\cdot м}{м^2\cdot c^2}\cdot c} = \tag{3}$$

$$= 0{,}010\,\frac{м}{c}$$

1.3 Из формулы (2) следует, что скорость частицы пропорциональная расстоянию до оси вращения, поэтому движение такой частицы не является равномерным. Для оценки времени движения можно использовать среднее арифметическое скоростей движения частицы в начале и конце рассматриваемого интервала. Для упрощения численных расчетов зависимость скорости от расстояния запишем в виде

$$V(r) = V_0\,\frac{r}{r_0}\,, \tag{4}$$

где V_0 - скорость частицы на расстоянии r_0, причем в качестве этих величин используем численные значения, рассчитанные в п. 1.2.

Указанная оценка времени движения частицы дает

$$\tilde{t} = \frac{2l}{V_0 + V_0\,\frac{r_0 + l}{r_0}} = \frac{2\cdot 0{,}05}{0{,}010\left(1 + \frac{20}{15}\right)} \approx 4{,}3c \tag{5}$$

Дополнение.

Точный расчет времени движения также может быть проведен. Из уравнения (4), записанного в дифференциальной форме следует, что закон движения имеет экспоненциальный вид

$$\frac{dr}{dt} = V_0\,\frac{r}{r_0} \quad \Rightarrow \quad r = r_0 \exp\left(\frac{V_0}{r_0}t\right).$$

Из точного закона движения находим время смещения частицы на расстояние l :

$$\tilde{t} = \frac{r_0}{V_0}\ln\frac{r_0 + l}{r_0} = \frac{0{,}150}{0{,}010}\ln\frac{20}{15} = 4{,}32\,c\,.$$

Часть 2. Определение размеров частиц.

2.1 Для определения скорости опускания частиц достаточно в формуле (2) заменить центростремительное ускорение ускорением свободного падения. Расчет скорости в этом случае приводит к следующему значению

$$V = \frac{R^2(\rho - \rho_0)g}{9\eta} = \frac{\left(0{,}212\cdot 10^{-6}\right)^2 м^2 \cdot (1{,}194 - 0{,}998)\cdot 10^3\,\frac{кг}{м^3}\cdot 9{,}81 с^{-2}\cdot м}{9\cdot 1{,}005\,\frac{кг\cdot м}{м^2\cdot с^2}\cdot с} = \qquad (6)$$

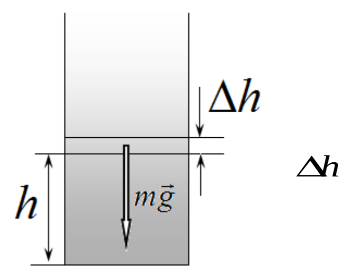
$$= 9{,}55\cdot 10^{-6}\,\frac{м}{с}$$

2.2 Скорость движения в данном случае постоянна, поэтому время движения рассчитывается по формуле

$$t = \frac{l}{V} = \frac{5{,}0\cdot 10^{-2}\,м}{9{,}55\cdot 10^{-6}\,\frac{м}{с}} = 5{,}2\cdot 10^3\,с\,, \qquad (7)$$

что примерно равно полутора часам.

Часть 3. Распределение частиц по высоте.



3.1 При постоянной температуре концентрация молекул газа пропорциональна давлению газа. Изменение давления с высотой связано с действием силы тяжести. В пределах слоя малой толщины можно считать давление (а также концентрацию и плотность) постоянным. Тогда для изменения ΔP давления при подъеме на высоту Δh справедливо выражение (где плотность газа выражена из уравнения состояния):

$$\Delta P = -\rho g\Delta h = -\frac{PM}{RT}g\Delta h\,. \qquad (8)$$

Полагая $\frac{\Delta P}{P} = 1\% = 0{,}01$, из этой формулы находим высоту

$$(\Delta h)_{1\%} = \frac{\Delta P}{P}\cdot\frac{RT}{Mg} = 0{,}01\frac{8{,}31\cdot 293}{32\cdot 10^{-3}\cdot 9{,}81} = 77{,}6\,м \approx 80\,м\,. \qquad (9)$$

3.2. На каждом слое толщиной $(\Delta h)_{1\%}$ концентрация убывает на 1%, следовательно, с увеличением числа слоев концентрация убывает в геометрической прогрессии. Найдем, сколько слоев толщиной $(\Delta h)_{1\%}$ необходимо пройти, чтобы, уменьшение концентрации составило 50%. Для этого надо решить уравнение

$$0{,}99^N = 0{,}5 \quad\Rightarrow\quad N \approx 69 \qquad (10)$$

Следовательно, высота, на которой концентрация убывает в два раза, равна

$$h_{1/2} = 0{,}01N\cdot\frac{RT}{Mg} = 0{,}69\frac{RT}{Mg}\,. \qquad (11)$$

Это же выражение следует из барометрической формулы

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{Mg}{RT}h\right) \quad \Rightarrow \quad h_{1/2} = \ln 2 \frac{RT}{Mg}.$$

3.3 Так как к частицам применимы законы идеального газа, то применима и формула (11). Только в ней молярную массу молекул надо заменить «молярной» массой частиц $M = N_A m$, где m - масса одной частицы. Кроме того, необходимо учесть действие силы Архимеда на частицу в воде, что приведет к появлению «эффективного» ускорения свободного падения g^*. С учетом этих оговорок, из формулы (11) следует выражение для расчета постоянной Авогадро

$$h_{1/2} = 0{,}69\frac{RT}{Mg} = 0{,}69\frac{RT}{N_A m g^*} \quad \Rightarrow \quad N_A = 0{,}69\frac{RT}{mg^* h_{1/2}}. \qquad (12)$$

Подстановка численных значений приводит к результату

$$N_A = 0{,}69\frac{RT}{mg^* h_{1/2}} = 0{,}69\frac{RT}{\frac{4}{3}\pi R^3(\rho - \rho_0)gh_{1/2}} =$$

$$= 0{,}69\frac{8{,}31\frac{Дж}{моль\cdot K}\cdot 293K}{\frac{4}{3}\pi\left(0{,}212\cdot 10^{-6}\right)^3 м^3\cdot(1{,}194 - 0{,}998)\cdot 10^3\frac{кг}{м^3}\cdot 9{,}81 с^{-2}\cdot м\cdot 30\cdot 10^{-6} м} = \qquad (13)$$

$$= 7{,}23\cdot 10^{23}\,моль^{-1} \approx 7\cdot 10^{23}\,моль^{-1}$$

Это значение немного превышает современное постоянной Авогадро, но это же было первое ее экспериментальное измерение!