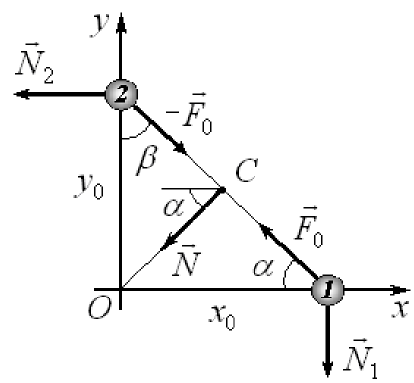
## Задача 11.1 Притяжение

Наиболее простой и общий путь решения данной задачи – использование уравнения динамики для движения центра масс, именно он выбран в качестве основного. Возможны и другие пути решения, некоторые из них приведены в качестве альтернативных вариантов.

**1.** Изобразим силы, действующие на бусинки в процессе движения. Силы реакции осей $N_1$ и $N_2$ перпендикулярны соответствующим осям. Обозначим их равнодействующую через $N = N_1 + N_2$.




Поскольку каждая бусинка движется вдоль соответствующей оси, то ее ускорение в направлении, перпендикулярном данной оси отсутствует. Следовательно, справедливо равенство

$$N_1 = F_0 \sin\alpha$$
$$N_2 = F_0 \sin\beta = F_0 \cos\alpha \text{'} \qquad (1)$$

где $\alpha$ и $\beta$ углы, обозначенные на рисунке.

Рассматривая движение системы (две бусинки) в целом, заметим, что сумма сил притяжения бусинок равна нулю, поскольку эти силы являются внутренними. Следовательно, на движение центра масс влияют только силы реакции осей $N_1$ и $N_2$, т.е. фактически их равнодействующая $N$.

Положение центра масс (точка $C$ на рисунке) в начальный момент времени задается координатами

$$x_C = \frac{m_1}{m_1 + m_2} x_0 = \frac{x_0}{2}$$
$$y_C = \frac{m_2}{m_1 + m_2} y_0 = \frac{y_0}{2}, \qquad (2)$$

где $x_0$ и $y_0$ — начальные координаты бусинок.

Аналогично, проекции векторов скорости и ускорения центра масс на соответствующие оси координат в два раза меньше скоростей и ускорений самих бусинок.

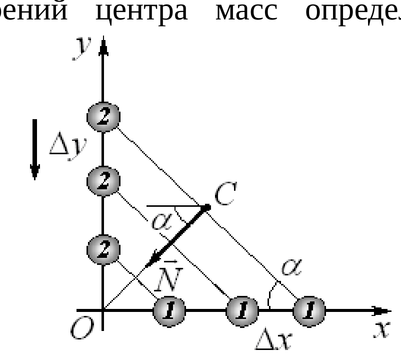
Согласно основному закону динамики для ускорения центра масс системы в проекциях на соответствующие оси с учетом равенства (1) получим уравнения

$$\begin{cases} 2ma_{xC} = -N_2 = -F_0 \cos\alpha \\ 2ma_{yC} = -N_1 = -F_0 \sin\alpha \end{cases}, \qquad (3)$$

где $a_x$ и $a_y$ — проекции ускорения центра масс на координатные оси.

Как следует из (3), отношение проекций ускорений центра масс определяется отношением начальных смещений бусинок вдоль соответствующих осей

$$\frac{a_{xC}}{a_{yC}} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x_0}{y_0}. \qquad (4)$$




Кроме того, из (3) можно сделать вывод, что вектор равнодействующей $N$ двух сил $N_1$ и $N_2$ всегда «смотрит» в начало координат (см. рис) и равен по модулю силе взаимодействия $F_0$ .

Следовательно, центр масс системы (точка $C$ ) будет двигаться по направлению к началу координат (вдоль отрезка $CO$) в течение всего времени движения. При этом отрезок *12* будет приближаться к началу координат, оставаясь параллельным самому себе, т.е. в процессе движения угол $\alpha$ будет оставаться постоянным.

Не смотря на очевидность сделанного утверждения докажем это.

Действительно, за малый промежуток времени $\Delta t$ после начала движения бусинки сместятся на расстояния

$$\Delta x = \frac{a_x \Delta t^2}{2};\ \Delta y = \frac{a_y \Delta t^2}{2}, \tag{5}$$

причем отношение этих расстояний определяется отношением ускорений бусинок в начальный момент времени

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{a_x}{a_y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{x_0}{y_0} \tag{6}$$

Однако отношение

$$\frac{x_0}{y_0} = \frac{x_0 - \Delta x}{y_0 - \Delta y} = ctg\alpha = const \tag{7}$$

будет сохраняться при выполнении условия

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{x_0}{y_0}, \tag{8}$$

что совпадает с равенством (6). Таким образом, через малый промежуток времени $\Delta t$ после начала движения отрезок *12* на рисунке сохранит свойство параллельности самому себе. Далее следует заметить, что и скорости бусинок по прошествии промежутка времени $\Delta t$ будут находиться в том же отношении, поэтому и для последующих интервалов времени будет выполняться соотношение (8).

Таким образом, бусинки попадут в начало координат одновременно (и вместе с центром масс!), причем интересно, что данный вывод не зависит от вида зависимости силы $F(r)$ притяжения между бусинками.

Существенно в данном случае, чтобы сила притяжения была центральной, т.е. направленной вдоль отрезка, соединяющего бусинки в данный момент.

***<u>Альтернативные решения:</u>***

Для доказательства факта одновременного попадания бусинок в начало координат при произвольном взаимодействии $F(r)$ запишем уравнения движения вдоль каждой из осей

$$\begin{aligned} ma_1 &= -F\cos\alpha = -F(r)\frac{x}{r} \\ ma_2 &= -F\sin\alpha = -F(r)\frac{y}{r} \end{aligned}, \tag{9}$$

где $x$ и $y$ представляют собой текущие координаты бусинок. Переходя к безразмерным координатам

$$\xi = \frac{x}{x_0},\quad \eta = \frac{y}{y_0},$$

видим, что получаются одинаковые уравнения движения при одинаковых начальных условиях

$$\xi''(t) = -\frac{F(r)}{m}\cdot\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}},\quad \xi_0 = 1.$$

$$\eta''(t) = -\frac{F(r)}{m} \cdot \frac{\eta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}, \quad \eta_0 = 1.$$

В таком случае решения также будут одинаковыми, что означает равенство времен движений бусинок.

**2.** Если сила притяжения бусинок постоянна по модулю, то движение центра масс (и бусинок) будет равноускоренным

$$2ma_C = N \quad \Rightarrow \quad a_C = \frac{N}{2m} = \frac{F}{2m}, \tag{10}$$

где $a$ — модуль ускорения центра масс (направление – к началу координат).

Следовательно, искомое время находим по известным формулам

$$t = \sqrt{\frac{2S}{a_C}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{4}}}{F/(2m)}} = \sqrt{\frac{2m\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{F}} \tag{11}$$

***<u>Альтернативные решения:</u>***

Рассмотрим случай, когда сила притяжения между бусинками постоянна по модулю $F(r) = F_0$. Тогда можем записать второй закон Ньютона для каждой бусинки в виде

$$ma_1 = -F_0 \frac{x}{r} = -F_0 \frac{x_0}{r_0}$$

$$ma_2 = -F_0 \frac{y}{r} = -F_0 \frac{y_0}{r_0}$$

В таком случае движение бусинок будет равноускоренным, а уравнения движения будут иметь вид

$$x(t) = x_0 - \frac{F_0}{2m} \cdot \frac{x_0}{r_0} t^2; \qquad y(t) = y_0 - \frac{F_0}{2m} \cdot \frac{y_0}{r_0} t^2.$$

Из последних уравнений следует, что время движения бусинок в этом случае

$$t = \sqrt{\frac{2mr_0}{F_0}} = \sqrt{\frac{2m\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}{F_0}}.$$

**3.** В случае упругой связи, согласно условию, $F(r) = -k \cdot r$, поэтому сила будет меняться по модулю. В этом случае уравнение (3) примет вид

$$2ma_C = -F(r) \quad \Rightarrow \quad a_C = -\frac{kr}{2m}. \tag{12}$$

Учитывая, что в данном случае $a_C = \frac{r''(t)}{2}$, получим уравнение гармонических колебаний в виде

$$r''(t) + \frac{k}{m} r(t) = 0, \tag{13}$$

с периодом

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{14}$$

Следовательно, центр масс (вместе с бусинками) «доберется» до начала координат за четверть периода колебаний

$$t = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{15}$$

***<u>Альтернативные решения:</u>***

В системе уравнений (9) запишем явное выражение для модуля силы $F = kr$

$$\begin{aligned} ma_1 &= -F(r)\frac{x}{r} = -kx \\ ma_2 &= -F(r)\frac{y}{r} = -ky \end{aligned},$$

Оба уравнения являются уравнениями гармонических колебаний с периодом, определяемым формулой (14).

**4.** При заряженных бусинках справедлив закон Кулона, согласно которому модуль силы притяжения разноименных зарядов в вакууме имеет вид

$$F(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\,. \tag{16}$$

В этом случае второй закон Ньютона для центра масс запишется следующим образом

$$2ma_C = -F(r) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q^2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad a_C = -\frac{c}{r^2(t)}\,. \tag{17}$$

где $c = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 m} = const$, причем в начальный момент времени $r(t=0) = r_0$.

Заметим, что уравнение (17) формально совпадает с уравнением движения под действием силы гравитации Ньютона, только значение размерной константы $c$ будет определяться другими параметрами.

Используя подсказку условия (третий закон Кеплера), рассмотрим движение планеты (центра масс системы) по круговой траектории (частный случай эллипса, у которого оба фокуса совпадают) радиусом $\dfrac{r}{2}$.

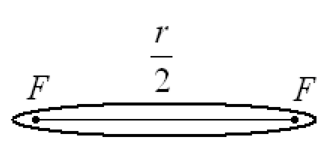
В этом случае получаем

$$2m\omega^2\frac{r}{2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{r^2}\,, \tag{18}$$

$$\omega = \frac{q}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m r^3}}\,. \tag{19}$$

Как следует из (19) полный период обращения по окружности

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 m r^3}{q^2}} = \frac{4\pi}{q}\sqrt{\pi\varepsilon_0 m\sqrt{(x_0^2 + y_0^2)^3}}\,. \tag{20}$$




Теперь рассмотрим гравитационное «падение» центра масс бусинок в начало координат по отрезку $CO$ (см. рис. выше). Отрезок можно считать «стянутым» эллипсом, фокусы $F$ которого находятся практически на его концах. Следовательно, его большая полуось будет равна $a = \dfrac{r}{4}$. Искомое время движения заряженных бусинок до начала координат составит половину периода обращения $T_2$ по такому вытянутому эллипсу с большой полуосью $\frac{r}{4}$ .

С учетом третьего закона Кеплера

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{(r/2)^3}{(r/4)^3} \Rightarrow T_2 = \frac{T_1}{\sqrt{8}} = \frac{T_1}{2\sqrt{2}} \qquad (21)$$

$$t = \frac{T_2}{2} = \frac{T_1}{4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{q\sqrt{2}}\sqrt{\pi\varepsilon_0 m\sqrt{(x_0^2 + y_0^2)^3}} \ . \qquad (22)$$

В данной части задачи также можно воспользоваться ***альтернативным вариантом*** решения, так как уравнения (9) формально совпадают с уравнениями динамики движения в центральном поле в проекциях на декартовые оси координат.