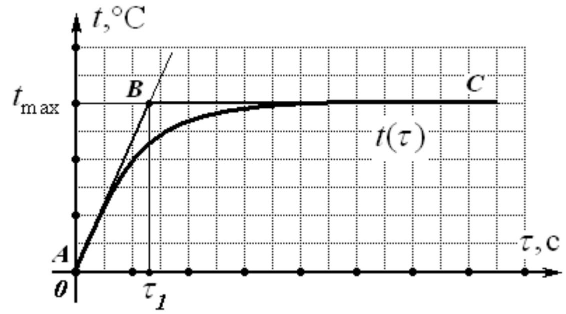
Задача 9.2 Предохранитель

Часть 1. Один предохранитель.

1.1 После замыкания цепи на предохранителе (резисторе) согласно закону Джоуля-Ленца начнет выделяться теплота, которая будет постепенно разогревать предохранитель до предельной температуры. График зависимости температуры предохранителя от времени $t(\tau)$ приведен в условии.



В переходном режиме температура предохранителя увеличивается. При этом часть теплоты идет на нагревание предохранителя ($Q_1 = cm\Delta t$), а часть (Q_2) «уходит» через боковую поверхность предохранителя в окружающую среду.

В стационарном режиме температура предохранителя установится, достигнув предельного значения $t_{\max}$, и далее перестанет нарастать, т.е. можно также назвать равновесной температурой. Действительно, по мере роста температуры резистора будет увеличиваться поток теплоты в окружающее пространство через его боковую поверхность, тогда как мощность тепловыделения будет оставаться постоянной. В этом режиме часть теплоты, идущая на нагревание предохранителя, равна нулю ($Q_1 = 0$).

Таким образом, в стационарном (установившемся) режиме количество теплоты, выделяемой в резисторе за промежуток времени, должно быть равно количеству теплоты Q_2, отдаваемому за этот же промежуток времени в окружающую среду (равенство мощностей)

$$I^2 R = \alpha S\,\Delta t = \alpha S\,t\,, \qquad (1)$$

где $R = \rho \dfrac{l}{\pi a^2}$ – сопротивление резистора, $S = 2\pi a l$ – площадь его боковой поверхности, α – коэффициент теплоотдачи.

Используя (1), найдем искомую температуру $t_{\max}$

$$t_{\max} = \frac{\rho I^2}{2\alpha\pi^2 a^3}\,. \qquad (2)$$

Отметим, что максимальная температура, до которой может разогреться предохранитель, обратно пропорциональна кубу его радиуса и пропорциональная квадрату силы тока.

Расчет для рассматриваемого предохранителя дает следующее значение

$$t_{\max} = \left(\frac{1{,}5\cdot 10^{-8}\cdot (10)^2}{2\cdot 8{,}5\cdot 10^2\cdot (3{,}14)^2\cdot (1{,}0\cdot 10^{-4})^3}\right)\,{}^\circ\mathrm{C} = 89\,{}^\circ\mathrm{C}\,. \qquad (3)$$

Для оценки времени τ_1 разогрева предохранителя до предельной температуры запишем уравнение теплового баланса в некоторый момент времени τ, когда его температура равна t

$$c\gamma\pi a^2 l\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = I^2\rho\frac{l}{\pi a^2} - \alpha 2\pi l a t = I^2\rho\frac{l}{\pi a^2} - \alpha 2\pi l a t\,, \qquad (4)$$

где Δt – приращение температуры предохранителя за малый промежуток времени $\Delta\tau$. Заметим, что на графике зависимости $t(\tau)$ величина $\dfrac{\Delta t}{\Delta\tau}$ соответствует скорости нарастания температуры со временем в рассматриваемой точке.

Скорость нарастания температуры в начальный момент времени ($t = 0$) равна

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau}\right)_0 = I^2 \frac{\rho}{\pi^2 c \gamma a^4}\,, \tag{5}$$

тогда точка пересечения прямой *AB* с горизонтальной прямой $t = t_{\max}$ будет соответствовать искомому значению τ_1 (см. рис. в условии). Таким образом,

$$\tau_1 = \frac{t_{\max}}{\left(\frac{\Delta t}{\Delta \tau}\right)_0} = \frac{c\gamma a}{2\alpha}\,. \tag{6}$$

Запомним, время разогрева пропорционально радиусу предохранителя.
Подстановка численных значений для рассматриваемого предохранителя дает $\tau_1 = 0{,}40\,c$

1.2 Плавление предохранителя происходит в том случае, если максимальная температура, которой может достичь предохранитель, превысит его температуру плавления $t_{пл} = 2{,}3 \cdot 10^2$ °C .

Таким образом

$$t_{\max} = t_{пл} = \frac{\rho I_{\max 1}^2}{2\alpha\pi^2 a^3} \;\Rightarrow\; I_{\max 1} = \sqrt{\frac{2\alpha\pi^2 a^3 t_{пл}}{\rho}}\,. \tag{7}$$

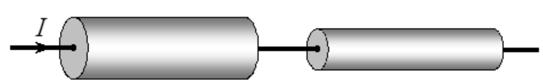
Расчет

$$I_{\max 1} = \sqrt{\frac{2 \cdot 8{,}5 \cdot 10^2 \cdot 3{,}14^2 \cdot (1{,}0 \cdot 10^{-4})^3 \cdot (230)}{1{,}5 \cdot 10^{-8}}}(\mathrm{A}) = 16\,\mathrm{A}\,. \tag{8}$$

Как следует из (7), максимальная сила тока $I_{\max}$ возрастает пропорционально радиусу в степени 3/2 $I \propto a^{3/2}$ - при заданной силе тока у предохранителя меньшего радиуса и сопротивление больше, и теплоотдача меньше!

Следовательно, при увеличении радиуса предохранителя в два раза сила тока, при которой он перегорит, возрастет в $\sqrt{8} = 2{,}83$ раза и станет равным $I_{\max 2} = 45\,\mathrm{A}$.

Часть 2. Два предохранителя.

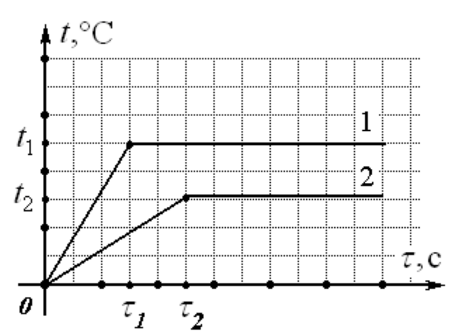


2.1 При последовательном включении предохранителей сила тока в них одинакова. При медленном увеличении силы тока температура каждого из предохранителей в любой момент будет равна равновесной температуре. Так как у меньшего проводника эта температура выше, то он и перегорит первым.

Если же сила тока в цепи устанавливается очень быстро, то для того, чтобы определить какой предохранитель перегорит быстрее необходимо проанализировать зависимости температур обоих предохранителей от времени. Время разогрева у меньшего предохранителя меньше, поэтому зависимости температур от времени имеют вид, показанный на рисунке: 1- предохранитель меньшего радиуса, 2- предохранитель большего радиуса. Из рисунка видно, в любом случае температура первого предохранителя в любой момент больше, поэтому он всегда перегорит первым. После того, как он перегорит, цепь разорвется.

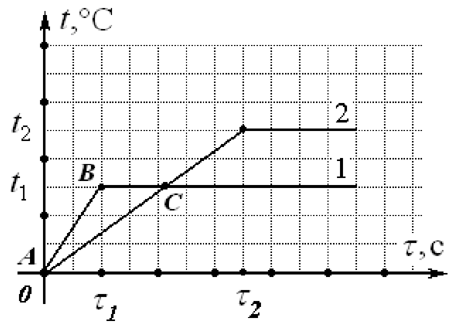
Таким образом, в этом случае составной резистор перегорит при силе тока в цепи

$$I_{\max 3} = I_{\max 1} = 16\,\mathrm{A}\,. \tag{9}$$



.

2.2 При параллельном соединении напряжения на предохранителях равны. Поэтому в данном случае удобно выразить предельную (равновесную) температуру через напряжение на предохранителе. Из условия теплового равновесия, которое в данном случае имеет вид



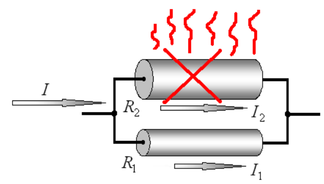
$$\frac{U^2}{R} = \alpha 2\pi a l t\,, \tag{10}$$

следует, что эта температура равна

$$t_{\max} = \frac{U^2}{R\cdot 2\alpha\pi a l} = \frac{U^2}{\frac{\rho l}{\pi a^2}\cdot 2\alpha\pi a l} = \frac{U^2 a}{2\pi\alpha l^2 \rho}\,, \tag{11}$$

и пропорциональна радиусу предохранителя.

Следовательно, при медленном увеличении силы тока в цепи первым перегорит более толстый предохранитель. Это произойдет при токе через него силой $I_{\max 2} = 45\,\text{А}$. Сила тока в общей цепи в этом случае должна быть равной $I_{\max 4} = \left(1+\frac{1}{4}\right) I_{\max 2} = 56\,\text{А}$. После перегорания второго предохранителя весь ток пойдет через первый, и его достаточно, чтобы сжечь и этот предохранитель!

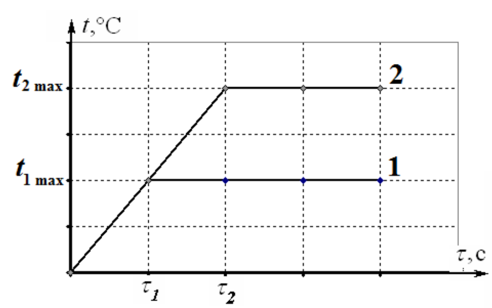


Если в цепи мгновенно устанавливается некоторое значение силы тока, то необходимо анализировать зависимости температур резисторов от времени.

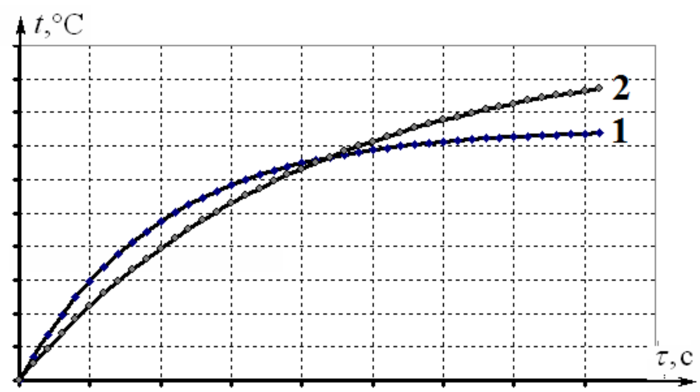
Из уравнения теплового баланса (4) следует, что время разогрева не зависит ни от силы тока, ни от напряжения на предохранителе и определяется формулой (6)., которая утверждает, что время разогрева пропорциональна радиусу предохранителя.

Таким образом, в данных условиях реализуется неожиданная ситуация: и максимальная температура и время разогрева одинаково зависят от радиуса предохранителя. Поэтому графики зависимостей температуры от времени будут совпадать до достижения одним из них предельной температуры.

При токе в цепи равном $I_0 = 5 I_{\max 4} = 280\,\text{А}$, сила тока через первый предохранитель будет равна $I = \frac{1}{5} I_0 = 56 A$. При такой силе тока, этот предохранитель также расплавится, поэтому в рамках данной модели оба предохранителя должны расплавиться одновременно! Однако, в рамках более точной модели, которая показана на графике в условии задачи, следует, что в этом случае температура более толстого предохранителя все время будет немного выше, поэтому первым перегорит именно он!



2.3 Если укоротить длину первого предохранителя то его максимальная (равновесная) температура в соответствии с формулой (11) повысится, а время разогрева не изменится, поэтому схематические графики зависимостей температур от времени приобретут вид, показанный на рисунке. Максимальная температура первого предохранителя также превысит температуру плавления. Поэтому в соответствии с графиком, в этом случае первым расплавится предохранитель меньшего радиуса.



Заметим, что и при точном расчете данный вывод подтверждается, что иллюстрируют графики точной зависимости предохранителей от времени.