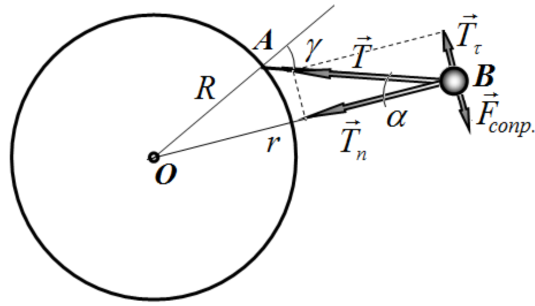
Задача 9-3 Праща.

Часть 1. Во всем виновато сопротивление воздуха!



1.1 Так как на шайбу действует сила сопротивления воздуха, то веревка должна отклониться от радиального направления на некоторый угол γ. В этом случае шайба будет двигаться по окружности некоторого радиуса r (отрезок OB), а ее вектор скорости направлен перпендикулярно этому отрезку. Обозначим угол между нитью и отрезком OB α. Так как длина нити равна радиусу диска, треугольник OAB является равнобедренным. Поэтому

$$\gamma = 2\alpha, \tag{1}$$

$$r = 2R\cos\alpha \tag{2}$$

Силу натяжения нити удобно разложить на две составляющих: радиальную T_n (сообщающую шайбе центростремительное ускорение) и касательную к траектории T_τ (которая компенсирует силу сопротивления воздуха).
На основании второго закона Ньютона запишем уравнения движения для этих двух составляющих

$$\begin{array}{l} T\cos\alpha = m\omega^2 r \\ T\sin\alpha = \beta\omega r \end{array}. \tag{3}$$

Неизвестный параметр β можно определить из известной скорости установившегося падения шайбы (в этом режиме сила тяжести уравновешивается силой сопротивления воздуха):

$$\beta v_0 = mg \quad \Rightarrow \quad \beta = \frac{mg}{v_0}. \tag{4}$$

Разделив второе уравнение системы (2) на первое получим формулу для тангенса угла

$$tg\,\alpha = \frac{\beta}{m\omega} = \frac{g}{\omega v_0}. \tag{5}$$

Подстановка численных значений (с учетом $\omega = 2\pi n$) приводит к результату

$$tg\,\alpha = \frac{g}{\omega v_0} = \frac{10}{2\pi\cdot 1\cdot 50} \approx 0{,}032 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1{,}8^\circ. \tag{6}$$

Следовательно, искомый угол отклонения нити равен

$$\gamma = 2\alpha = 3{,}6^\circ. \tag{7}$$

Скорость движения шайбы равна

$$v = r\omega = 4\pi Rn\cos\alpha = 13\frac{м}{с}. \tag{8}$$

Заметим, что при таком угле отклонения $r = 2R\cos\alpha \approx 2{,}0\,м$, *что в пределах точности исходных данных совпадает с удвоенным радиусом диска. То есть при таком угле для расчета скорости шайбы можно пренебречь отклонением нити от радиального направления.*

1.2 Максимальная скорость шайбы будет достигнута, когда сила натяжения нити достигнет максимального значения. В этом случае в систему уравнений (4) подставим максимальное значение силы натяжения и формулу (2) для радиуса траектории:

$$\begin{cases} T_{max}\cos\alpha = m\omega^2 r \\ T_{max}\sin\alpha = \beta\omega r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Kmg\cos\alpha = 2Rm\omega^2\cos\alpha \\ Kmg\sin\alpha = 2R\dfrac{mg}{v_0}\omega\cos\alpha \end{cases}. \tag{9}$$

По-прежнему, справедливо (5), кроме того, из второго уравнения этой системы следует, что

$$tg\alpha = \frac{2R\omega}{Kv_0}. \tag{10}$$

Приравнивая эти два выражения для тангенса угла α, получим формулу для максимальной угловой скорости вращения диска

$$\frac{2R\omega}{Kv_0} = \frac{g}{v_0\omega} \quad \Rightarrow \quad \omega_{\max} = \sqrt{\frac{Kg}{2R}} = 7{,}1\,c^{-1} \tag{11}$$

При этой угловой скорости угол отклонения нити будет еще меньшим, поэтому можно считать, что радиус траектории шайбы равен $r = 2R$. Следовательно, максимально возможная скорость шайбы равна

$$v_{\max} = 2R\omega_{\max} = \sqrt{2KRg} = 14\frac{м}{с}. \tag{12}$$

Часть 2. Во всем виновата сила трения.

2.1 Коэффициент трения можно найти из уравнения закона сохранения энергии (начальная кинетическая энергия шайбы равна работе силы трения):

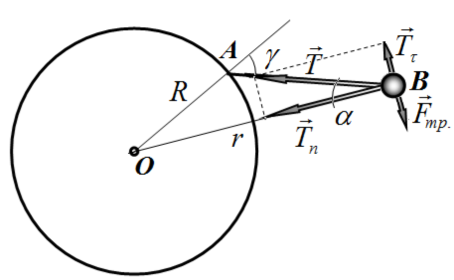
$$\frac{mv_1^2}{2} = \mu mgS. \tag{13}$$

Из которого следует

$$\mu = \frac{v_1^2}{2gS} = \frac{1}{2\cdot 10\cdot 0{,}12} = 0{,}42. \tag{14}$$

Этот же результат следует и из кинематических соотношений для равнозамедленного движения шайбы.

2.2 Главное отличие решения данной части задачи от предыдущей - в другом выражении для силы сопротивления, сейчас это постоянная по модулю сила трения. В остальном, решение принципиально не отличается от предыдущего. Рисунок действующих на шайбу сил отличается от рассмотренного ранее только обозначением силы сопротивления. Уравнения второго закона Ньютона для шайбы в прежних проекциях будут иметь вид



$$\begin{cases} T\cos\alpha = m\omega^2 r \\ T\sin\alpha = \mu mg \end{cases}. \tag{15}$$

Здесь $F_{тр.} = \mu mg$ - сила трения, действующая на шайбу. Подставляя выражение (2) для радиуса траектории в первое уравнение этой системы, получим формулу для силы натяжения нити

$$T\cos\alpha = 2m\omega^2 R\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad T = 2m\omega^2 R\,. \tag{16}$$

Теперь из второго уравнения системы (15) найдем значение угла α

$$2m\omega^2 R\sin\alpha = \mu mg \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha = \frac{\mu g}{2\omega^2 R} = \frac{\mu g}{8\pi^2 n^2 R}\,. \tag{17}$$

Подстановка численных значений приводит к следующему значению угла α.

$$\sin\alpha = \frac{\mu g}{8\pi^2 n^2 R} = \frac{0{,}42\cdot 10}{8\pi^2\cdot(0{,}30)^2\cdot 1{,}0} = 0{,}59 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 36^\circ \tag{18}$$

Следовательно, скорость шайбы будет равна

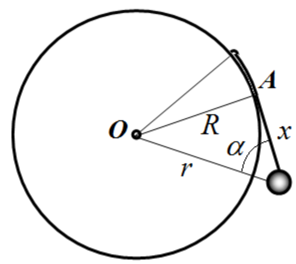
$$v = 2\pi n\cdot 2R\cos\alpha = 4\pi nR\cos\alpha = 3{,}0\,\frac{м}{с}\,. \tag{19}$$

Можно, конечно, подставить в формулу выражения для косинуса (выразив его через синус):

$$v = 4\pi nR\cos\alpha = 4\pi nR\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 4\pi nR\sqrt{1-\left(\frac{\mu g}{8\pi^2 n^2 R}\right)^2}\,.$$

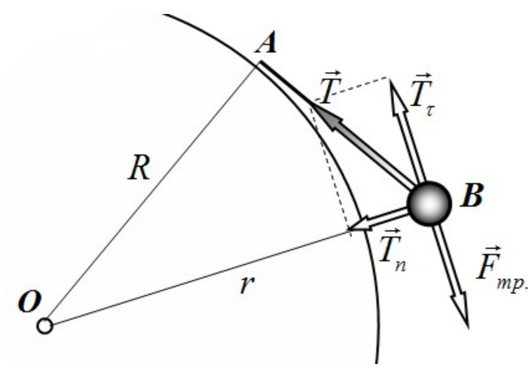
2.3 Расчет угла α при $n = 0{,}25\,\frac{об.}{с}$ приводит к результату

$$\sin\alpha = \frac{\mu g}{8\pi^2 n^2 R} = \frac{0{,}42\cdot 10}{8\pi^2\cdot(0{,}25)^2\cdot 1{,}0} = 0{,}85 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 58^\circ \tag{20}$$



Этот угол превышает 45°, а угол отклонения нити $\gamma = 2\alpha$ становится больше 90°! Чего быть не может – следовательно, нить будет частично намотана на диск.

Это приведет к иному решению. Рисунок действующих сил и расстояний в этом случае имеет иной вид. Система уравнений (15) остается неизменной, но формула для радиуса траектории (2) в данном случае неприменима.



Из системы уравнений (15) выразим тангенс угла α

$$tg\,\alpha = \frac{\mu g}{\omega^2 r} \tag{21}$$

И приравняем его к выражению, следующему из прямоугольного (в данном случае) треугольника OAB

$$tg\,\alpha = \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}} \tag{22}$$

Из полученного уравнения можно определить радиус траектории

$$\frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}} = \frac{\mu g}{\omega^2 r} \quad \Rightarrow \quad r^2 = \left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2 \left(r^2 - R^2\right) \quad \Rightarrow$$

$$r = R\sqrt{\frac{\left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2}{\left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2 - 1}} \tag{23}$$

Отметим, что формулы для радиусов траектории (23) и (2) стыкуются при $\alpha = 45°$*. В этом случае* $\sin\alpha = \frac{\mu g}{2\omega^2 R} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mu g}{\omega^2 R} = \sqrt{2}$ *и тогда из формулы (23) следует, что* $r = R\sqrt{2}$

При заданном значении частоты вращения $n = 0{,}25\ \frac{об.}{с}$ радиус траектории равен

$$\frac{\mu g}{\omega^2 R} = \frac{0{,}40 \cdot 10}{(2\pi \cdot 0{,}25)^2 \cdot 1{,}0} = 1{,}62 \quad \Rightarrow \quad r = R\sqrt{\frac{\left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2}{\left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2 - 1}} = 1{,}0 \cdot \sqrt{\frac{(1{,}62)^2}{(1{,}62)^2 - 1}} = 1{,}27\ м\ .$$

Соответственно, скорость шайбы равна

$$v = 2\pi n r = 2{,}0\,\frac{м}{с}\ . \tag{24}$$

2.4 Если не заметить «подвоха» в пункте 2.3 и упрямо подставлять значения частоты вращения в формулу (17), то при заданном значении угловой скорости получим абсурдный результат:

$$\sin\alpha = \frac{\mu g}{8\pi^2 n^2 R} = \frac{0{,}40 \cdot 10}{8\pi^2 \cdot (0{,}20)^2 \cdot 1{,}0} = 1{,}25 \quad \Rightarrow \quad \alpha = ??? \tag{25}$$

Фактически этот пункт задачи является «подсказкой» и к предыдущему пункту.
Поэтому расчет следует вести по формулам (23) –(24):

$$\frac{\mu g}{\omega^2 R} = \frac{0{,}40 \cdot 10}{(2\pi \cdot 0{,}20)^2 \cdot 1{,}0} = 2{,}53 \quad \Rightarrow \quad r = R\sqrt{\frac{\left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2}{\left(\frac{\mu g}{\omega^2 R}\right)^2 - 1}} = 1{,}0 \cdot \sqrt{\frac{(2{,}53)^2}{(2{,}53)^2 - 1}} = 1{,}09\ м$$

$$v = 2\pi n r = 1{,}4\,\frac{м}{с}\ . \tag{26}$$