10 класс.

Задача 10-1 Подобие и размерность.

1. Физические величины, которые определяют форму капли это: плотность воды, поверхностное натяжение, радиус капли и ускорение свободного падения. Основная задача, как следует из подсказки, найти безразмерную комбинацию этих величин. Приведем единицы измерения величин к основным единицам СИ.

$[\rho] = кг/м^3$, $[\sigma] = Н/м = кг/с^2$, $[R] = м$, $[g] = м/с^2$.

Очевидно, из этих величин можно составить единственную безразмерную комбинацию: $\dfrac{\rho R^2 g}{\sigma}$.

Таким образом, формы капель будут подобными, если: $\dfrac{\rho_1 R_1^2}{\sigma_1} = \dfrac{\rho_2 R_2^2}{\sigma_2}$.

2. В данном явлении фигурируют следующие физические величины:

$[p] = Па = кг/с^2 м$ - давление внутри звезды;

$[M] = кг$ - масса звезды;

$[R] = м$ - радиус;

$[G] = Нм^2/кг^2 = м^3/с^2 кг$ - гравитационная постоянная, определяющая силу взаимодействия.

Найти безразмерную комбинацию в этом случае не очень просто. Поэтому предположим, что безразмерная комбинация имеет вид: $p^a M^b R^c G^d$. И попытаемся определить такие значения a, b, c, d , при которых это произведение будет безразмерной величиной. Подставляя единицы измерения, получим комбинацию:

$$\frac{кг^a}{с^{2a} м^a} кг^b м^c \frac{м^{3d}}{с^{2d} кг^d} \qquad (1).$$

Рассматривая каждую единицу измерения по отдельности, получим:

$$\begin{cases} a + b - d = 0 \\ -a + c + 3d = 0 \\ -2a - 2d = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

Система, безусловно, имеет бесчисленное множество решений. Однако нам необходимо найти хотя бы одно. Для этого предположим, например, что $a = 1$. Тогда:

$$d = -1,\ b = -2,\ c = 4 \qquad (3).$$

Т.е. искомая безразмерная комбинация имеет вид: $\dfrac{pR^4}{GM^2}$.

Таким образом, между массами и радиусами звезд с одинаковым давлением внутри, должно выполняться соотношение:

$$\frac{R_1^2}{M_1} = \frac{R_2^2}{M_2} \qquad (4)$$

При решении этой задачи мы пренебрегли действием светового излучения, давление которого может быть достаточно существенно.

3. Физические величины, определяющие явление:

$[\rho] = кг/м^3$ - плотность воды;

$[h] = м$ - высота водослива;

$[q] = кг/с$ - расход;

$[g] = м/с^2$.

Проводя рассуждения аналогичные второй задаче, найдем безразмерную комбинацию: $\dfrac{q}{\rho g^{1/2} h^{5/2}}$.

Таким образом, можно сделать вывод, что расход пропорционален высоте в степени $5/2$. И при увеличении перепада высот в 2 раза, расход увеличится в $\approx 5{,}7$ раз.

Задача 10-2 Полетели?

1.1 В момент старта сила тяги, очевидна равна силе тяжести

$$F_р = Mg \tag{1}$$

Численное значение $F_р = 45 \cdot 10^3 \cdot 10 = 45 \cdot 10^4\ \text{Н} = 450\,\text{кН}$

1.2 Проще всего доказать эту формула в системе отсчета связанной с ракетой в какой-то малый промежуток времени. В этой системе продукты сгорания получают импульс $\mu \Delta t \cdot u$. Следовательно, и ракета получает такой же импульс (только в противоположном направлении) Разделив это выражение на малый промежуток времени Δt получим требуемое выражение для силы тяги. Так как величина силы не зависит от выбора инерциальной системы отсчета, то это выражение справедливо для любого момента времени и любой скорости ракеты.

1.3 Так как в начальный момент времени сила тяги равна силе тяжести, то расход топлива можно найти из этого условия

$$\mu u = Mg \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{Mg}{u}, \qquad \mu = 150 \frac{\text{кг}}{\text{с}} \tag{2}$$

1.4 Мощность двигателя ракеты: $P = \dfrac{A}{\Delta t}$, где A – работа, совершенная силами давления продуктов сгорания в камере сгорания двигателя за промежуток времени Δt. По теореме о кинетической энергии эта работа равна изменению кинетической энергии продуктов сгорания и ракеты. В момент старта ракета покоилась, поэтому:

$$A = \frac{\Delta m u^2}{2} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{\Delta m u^2}{2\Delta t} = \frac{\mu u^2}{2} = \frac{Mgu}{2}. \tag{3}$$

$$P = \frac{45 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 3000}{2} = 675(\text{МВт}).$$

1.5 К моменту времени t после старта масса ракеты уменьшилась и стала равна $M - \mu t$. По второму закону Ньютона:

$$F_р - (M - \mu t)g = (M - \mu t)a.$$

Учитывая полученные ранее выражения для силы тяги и расхода топлива, получаем:

$$Mg - \left(M - \frac{Mg}{u}t\right)g = \left(M - \frac{Mg}{u}t\right)a \quad \Rightarrow$$

$$a = \frac{g^2 t}{\upsilon - gt}. \tag{4}$$