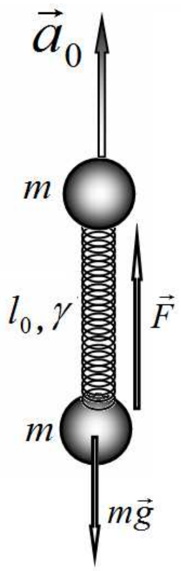
приходим к уравнениям вида (17). Тем самый в очередной раз доказывается, что движение заряженного маятника аналогично колебаниям во вращающейся системе отсчета.

В заключение посмотрите на примерную траекторию движения шарика маятника во вращающейся системе отсчета. Здесь угловая скорость вращения в 10 раз меньше круговой частоты колебаний маятника, хотя в реальности это отношение значительно меньше!

Задача 11-3. Выпад против Эйнштейна?

Часть 1. Два шарика.



При движении с ускорением сила упругости пружинки должна обеспечивать ускорение нижнего шарика, поэтому в положении равновесия должно выполняться условие

$$F = m(g + a_0), \tag{1}$$

Следовательно, в этом положении удлинение пружинки равно

$$\Delta x = \frac{m(g + a_0)}{\gamma}\ . \tag{2}$$

Таким образом, смещение от положения прежнего положения равновесия оказывается равным

$$\Delta x_1 = \frac{m a_0}{\gamma}\,. \tag{3}$$

Эта величина является амплитудой колебаний. Поэтому закон движения шарика (с учетом начальных условий и изображенной оси координат) имеет вид

$$x(t) = -l_0 - \frac{m(g + a_0)}{\gamma} + \frac{m a_0}{\gamma}\cos\omega t\,. \tag{4}$$

Где $\omega = \sqrt{\dfrac{\gamma}{m}}$ - циклическая частота колебаний пружинного маятника.

Максимальное удлинение пружинки будет равно (через половину периода колебаний):

$$\Delta x = \frac{m(g + 2a_0)}{\gamma} \tag{5}$$

Относительное удлинение после прекращения колебаний:

$$\varepsilon_x = \frac{m(g + a_0)}{\gamma l_0} \tag{6}$$

может быть мало при большой жесткости пружинки.

Относительное изменение силы упругости

$$\varepsilon_F = \frac{\Delta F}{mg} = \frac{a_0}{g} \tag{7}$$

Не зависит от параметров груза и пружины.

Часть 2. Цепочка.

Рассмотрим пружинку, на которой висит k шариков снизу. Ее удлинение можно найти из условия равновесия

$$\Delta x_k = k\frac{mg}{\gamma}\,. \tag{8}$$

Так как цепочка содержит N пружинок, то суммарное удлинения находится как сумма арифметической прогрессии

$$\Delta L = \sum_{k=1}^{N} k\frac{mg}{\gamma} = \frac{mg}{\gamma}\frac{N(N+1)}{2}. \qquad (9)$$

Относительное удлинение цепочки

$$\varepsilon_L = \left(\frac{mg}{\gamma}\frac{N(N+1)}{2}\right)\Big/ Nl_0 = \frac{mg(N+1)}{2\gamma l_0}. \qquad (10)$$

При большом числе шариков эта величина может быть выражена как

$$\varepsilon_L = \frac{mg(N+1)}{2\gamma l_0} \approx \frac{mgL_0}{2\gamma l_0^2}. \qquad (11)$$

Т.е. относительное удлинение пропорционально начальной длине.

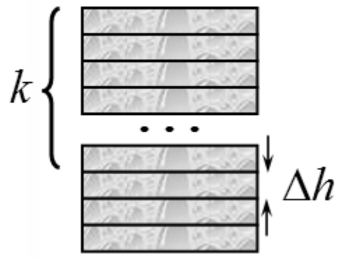
При движении у ускорением можно получить аналогичные формулы, заменяя g на $(g+a_0)$. Поэтому

$$\varepsilon_L = \frac{m(g+a_0)(N+1)}{2\gamma l_0} \approx \frac{m(g+a_0)L_0}{2\gamma l_0^2}. \qquad (12)$$

Относительные изменения сил натяжения всех пружинок будут одинаковыми и равными

$$\frac{\Delta F_k}{F_{k0}} = \frac{a_0}{g}. \qquad (13)$$

Часть 3 Сжатие воды.



Разобьем слой недеформированной воды на тонкие слои толщиной Δh. Их общее число равно $N = \frac{h}{\Delta h}$. Рассмотрим слой, над которым находится k слоев. Его сжатие будет равно

$\delta x_k = \beta \Delta h P_k = \beta \Delta h \cdot k\rho g \Delta h$

Суммируя сжатия всех слоев (с учетом того, что их очень много), получим

$$\begin{aligned}\Delta h &= \sum_{k=1}^{N} \delta x_k = \beta\rho g (\Delta h)^2 \sum_{k=1}^{N} k = \beta\rho g(\Delta h)^2 \frac{N(N+1)}{2} \approx \\ &\approx \frac{\beta\rho g (N\Delta h)^2}{2} = \frac{\beta\rho g h^2}{2} = \frac{0{,}44\cdot 10^{-9}\cdot 1{,}0\cdot 10^{3}\cdot 9{,}8\cdot\left(10^4\right)^2}{2} \approx 2{,}2\cdot 10^{2}\,м\end{aligned}. \qquad (14)$$

Из-за малой сжимаемости $\Delta h << h$, поэтому не принципиально какую глубину подставлять в эту формулу: сжатой, или недеформированной.

Часть 4. Смещение поплавка.

Понижение уровня воды можно рассчитать с помощью формулы (14) и также, используя замену $g \to g + a_0 = 2g$:

$$\Delta h = \frac{2\beta\rho g h^2}{2} - \frac{\beta\rho g h^2}{2} = \frac{\beta\rho g h^2}{2} = \frac{0{,}44\cdot 10^{-9} 1{,}0\cdot 10^{3}\cdot 9{,}8\cdot 1^2}{2} \approx 2{,}2\cdot 10^{-6}\,м \qquad (15)$$

Эта величина крайне мала, поэтому относительное изменение (увеличения) плотности равно относительному изменению (уменьшению) объема

$$\varepsilon_\rho = \frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta h}{h} \approx 2{,}2\cdot 10^{-6} = 2{,}2\cdot 10^{-4}\% \qquad (16)$$

Что также составляет крайне малую величину, по сравнению с изменением силы давления на дно, которая увеличится в 2 раза.

Изменение глубины погружения связано изменением плотности воды:
В покоящемся лифте (l_1 - глубина погружения, S - площадь поперечного сечения пробирки) справедливо уравнение

$$mg = \rho g l_1 S\,. \tag{17}$$

В ускоренно движущемся лифте -

$$2mg = 2\rho\left(1+\varepsilon_\rho\right)g\left(l_1+\delta l_1\right)S \tag{18}$$

Из этих уравнений следует, что пробирка поднимется на величину

$$\delta l_1 = \varepsilon_\rho l_1 = \varepsilon_\rho \eta l = 2{,}2\cdot 10^{-6}\cdot 0{,}80\cdot 0{,}50 \approx 8{,}8\cdot 10^{-7}\,м \tag{19}$$

Далее будем рассматривать все процессы в системе отсчета, связанной с лифтом
В рамках описанной модели распространения области сжатия (или области повышенного давления), процесс сжатия воды будет происходить, пока волна сжатия не достигнет поверхности воды. В течение этого промежутка времени $t = \frac{h}{c}$ дно движется с ускорением g, а верхняя поверхность еще покоится, поэтому

$$\Delta h = \frac{\beta\rho g h^2}{2} = \frac{g t^2}{2} = \frac{g}{2}\left(\frac{h}{c}\right)^2. \tag{20}$$

Откуда следует правильная формула для скорости упругих волн:

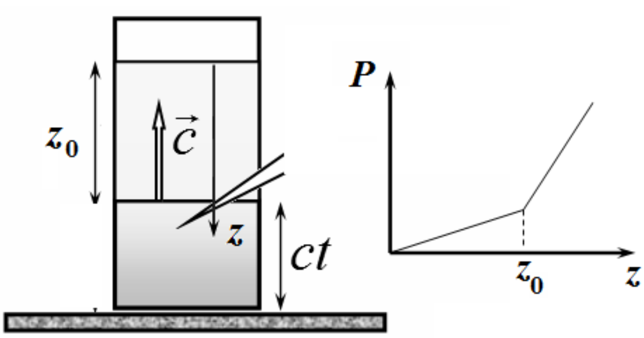
$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho\beta}} = 1{,}5\cdot 10^3\,\frac{м}{с} \tag{21}$$

Пусть в некоторый момент времени область повышенного давления достигла глубины z_0. Тогда ниже этой области изменение гидростатического давления определяется по формуле

$$\Delta P = \rho\left(g+a_0\right)\Delta z = 2\rho g \Delta z \tag{16}$$

А выше его (где вода «еще не почувствовала» ускорения) изменение давления остается прежним

$$\Delta P = \rho g \Delta z \tag{17}$$



Поэтому распределение давления по глубине будет иметь вид, показанный на рисунке.
Пусть волна сжатия достигла нижнего грая пробирки. В этот момент пробирка начнет «чувствовать» действие повышения давления. Далее давление на дно пробирки будет возрастать по закону в течение промежутка времени $\tau = \frac{\eta l}{c}$

$$p = 2\rho g c t + \rho g\left(\eta l - ct\right) = \rho g \eta l + \rho g c t \tag{22}$$

суммарная сила, действующая на пробирку, будет равна (с учетом силы тяжести $mg = \rho g \eta l S$):

$$F = -mg + \left(\rho g \eta l + \rho g c t\right)S = mg\frac{ct}{\eta l} \tag{23}$$

Считая этот промежуток малым, найдем импульс, который получит пробирка. Так как сила изменяется со временем по линейному закону, то для подсчета импульса силы можно взять ее среднее значение за время действия силы- пока волна не достигла поверхности воды. Поэтому на основании 2 закона Ньютона в импульсной форме можно записать (в системе отсчета, связанной с Землей)

$$mv = \frac{1}{2} mg \frac{c\tau}{\eta l} \cdot \tau \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\eta g l}{2c} = \frac{0{,}80 \cdot 9{,}8 \cdot 0{,}50}{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^3} \approx 1{,}3 \cdot 10^{-3} \frac{м}{с} \ . \qquad (24)$$

Так как в этот момент поверхность воды еще покоится, то это и будет максимальная скорость пробирки относительно поверхности воды.

Выводы делайте самостоятельно!