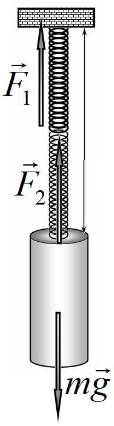
Задача 9-3 Гук против Архимеда!

Часть 1. Вспомним закон Гука.

Запишем условия равновесия груза на каждой пружине

$$\begin{aligned} k_1\eta_1 l = mg \\ k_2\eta_2 l = mg \end{aligned} \qquad (1)$$

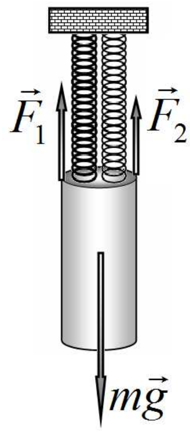


1.1 Если пружины соединены последовательно, их силы упругости будут равны между собой и равны силе тяжести, действующей на груз. Следовательно, относительные удлинения пружин останутся теми же. Поэтому суммарное удлинение двойной пружины будет равно

$$\Delta l = \eta_1 l + \eta_2 l \,. \qquad (2)$$

Длина составной недеформированной пружины в нерастянутом состоянии равна $2l$, следовательно, ее относительная деформация

$$\eta = \frac{\Delta l}{2l} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \,. \qquad (3)$$



1.2 При параллельном соединении пружин их удлинения будут одинаковы, поэтому одинаковы и относительные деформации. Суммарная сила упругости пружин должна уравновешивать силу тяжести, поэтому условия равновесия груза, подвешенного на двух пружинах, имеет вид

$$k_1\eta l + k_2\eta l = mg \,. \qquad (4)$$

Выражая из формул (1) значения жесткостей пружин

$$k_1 = \frac{mg}{\eta_1 l}, \quad k_2 = \frac{mg}{\eta_2 l}$$

и подставляя в выражение (4), получим

$$\frac{mg}{\eta_1 l}\eta l + \frac{mg}{\eta_2 l}\eta l = mg \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{\eta_1\eta_2}{\eta_1 + \eta_2} \,. \qquad (5)$$

Отметим, что формуле (5) можно придать «красивый» вид

$$\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} = \frac{1}{\eta} \,. \qquad (6)$$

Часть 2. Вспомним закон Архимеда.

Силу тяжести, действующей на каждый сосуд можно выразить из условия плавания каждого из сосудов

$$\begin{aligned} m_1 g = \rho g V \eta_1 \\ m_2 g = \rho g V \eta_2 \end{aligned} \,. \qquad (1)$$

Если сосуды связаны, то условия равновесия при плавании имеет вид

$$(m_1 + m_2)g = 2\rho g V \eta \,, \qquad (2)$$

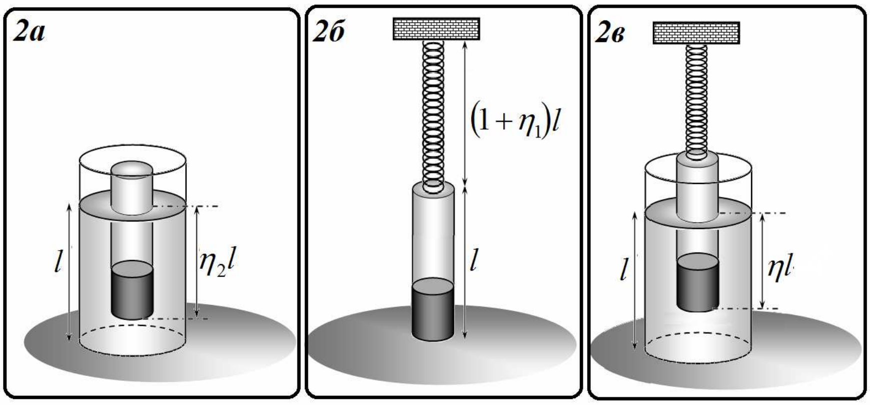
Где η - доля объема погруженной части обоих сосудов.

Из этих уравнений следует, что

$$\eta = \frac{\Delta l}{2l} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2} \,. \qquad (3)$$

Заметим, что этот результат не зависит от того, как связаны сосуды (даже если они связаны перпендикулярно!). Так как сила Архимеда в любом случае должна удовлетворять соотношению (2)

Часть 3. Гук против Архимеда.



Сравним положения цилиндра в положениях 2б и 2в: цилиндр приподнялся на высоту $\Delta h = l - \eta l$. При этом уменьшилась сила упругости пружины.

Понятно, что это уменьшение силы упругости скомпенсировано действием силы Архимеда. Эти рассуждения можно выразить уравнением

$$kl(1-\eta) = \rho g V \eta \qquad (1)$$

Неизвестные параметры систему можно выразить из условия плавания (без пружины):

$$mg = \rho g V \eta_2 \quad \Rightarrow \quad \rho g V = \frac{mg}{\eta_2} \qquad (2)$$

и условия равновесия на пружине (без воды):

$$mg = kl\eta_1 \quad \Rightarrow \quad kl = \frac{mg}{\eta_1}. \qquad (3)$$

Подстановка этих выражений в уравнение (1) и его последующее решение приводит к требуемому результату:

$$\frac{mg}{\eta_1}(1-\eta) = \frac{mg}{\eta_2}\eta \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}. \qquad (4)$$

3.2 Подстановка численных значений дает следующие величины относительного погружения.

1) $\eta_1 = 0{,}30$: $\eta = \frac{\eta_2}{\eta_1+\eta_2} = \frac{0{,}80}{0{,}80+0{,}30} = 0{,}73$, что меньше погружения при отсутствии пружины. Следовательно, в новом положении равновесия пружина еще остается растянутой и приподнимает цилиндр.

2) $\eta_1 = 0{,}20$: $\eta = \frac{\eta_2}{\eta_1+\eta_2} = \frac{0{,}80}{0{,}80+0{,}20} = 0{,}80$. В этом случае цилиндр плавает на той же глубине, что и без пружины. Не сложно показать, что в этом положении пружина не деформирована, поэтому не оказывает никакого воздействия на плавающий цилиндр.

3) $\eta_1 = 0{,}10$: $\eta = \frac{\eta_2}{\eta_1+\eta_2} = \frac{0{,}80}{0{,}80+0{,}10} = 0{,}89$. Здесь пружина оказывается сжатой, поэтому дополнительно вталкивает цилиндр в воду.