Задача 10-2 Мы мирные люди…

Часть 1. Знакомство с новой системой единиц измерения.

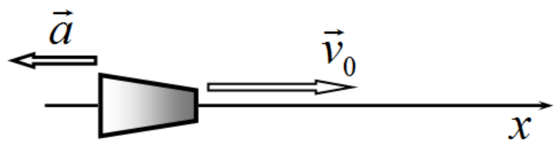
1.1 – 1.2 Единицами измерения длины и ускорения являются

$$l_0 = uT \qquad a_0 = \frac{u}{T} \ . \tag{1}$$

Отметим, что в этой системе единиц ускорение корабля всегда по модулю равно 1.

1.3 В традиционной системе единиц закон движения корабля имеет вид

$$x = 2ut - \frac{a_0 t^2}{2} \tag{2}$$



Чтобы перейти в собственную систему единиц, следует проделать замены (штрихами обозначены величины, измеренные в новой системе единиц):

$$t = T \cdot t', \quad x = l_0 x' = uTx' , \tag{3}$$

которые приводят к выражению

$$uTx' = 2u \cdot Tt' - \frac{1}{2}\frac{u}{T}(Tt')^2 ,$$

В котором все параметры сокращаются (штрихи опущены за ненадобностью):

$$x = 2t - \frac{t^2}{2} \tag{4}$$

Часть 2. Открытый космос.

2.1 *В этом пункте в последний раз используем обычную систему единиц измерения.* Очевидно, что максимальную скорость будут иметь те частицы шлейфа, которые испущены в начальный момент времени, и эта скорость равна $v_0 = 2u + u = 3u$. Скорости частиц, выпущенных позднее, будут меньше, так как ракета тормозит. Следовательно, на максимальное расстояние улетят частицы, испущенные в начальный момент времени. Из закона движения (2) следует, что время, через которое ракета вернется в начальное состояние равно

$$t_k = \frac{4u}{a_0} = 4T \ . \tag{5}$$

Поэтому максимальное удаление частиц шлейфа к моменту возвращения ракеты равно

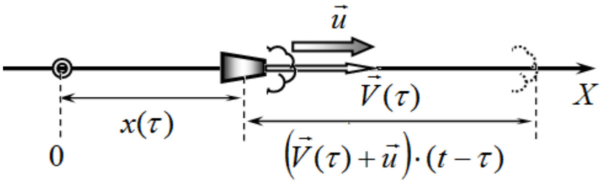
$$x_{\max} = 3u \cdot 4T = 12uT \ . \tag{6}$$

В собственной системе единиц: $x_{\max} = 12$.

Для того, чтобы найти минимальную координаты частиц шлейфа, рассмотрим положение частиц дыма, испущенных на обратном пути ракеты. Так как направление вылета частиц противоположно скорости ракеты, то они никогда не смогут догнать ракету. Следовательно, минимальная координата частиц шлейфа равна минимальной координате ракеты, т.е. $x_{\min} = 0$ *(в любой системе единиц)*. Таким образом, общая длина шлейфа к моменту возвращения ракеты равна $L = 12uT$.

2.2 *Здесь и далее используем собственную систему единиц. Напоминаем, в этой системе ускорение ракеты* $a_0 = 1$, *скорость вылета частиц дыма* $u = 1$.

Функцию $X(t,\tau)$ - координата частицы дыма в момент времени t, если эта частица была выпущена в момент времени τ, строится простым способом. Пусть закон движения ракеты задан функцией $x(t)$.



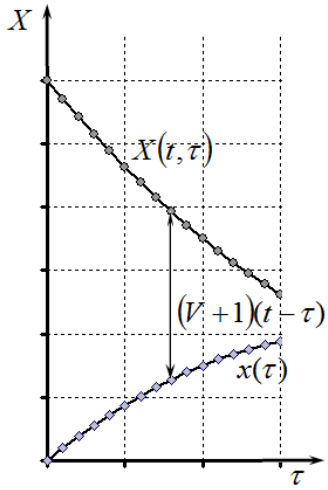
Тогда частица дыма, испущенная в момент времени τ (в этот момент ее координата $x(\tau)$), за оставшееся время $(t-\tau)$ ее координата изменится на величину равную

$$\Delta x = (v(\tau)+1)(t-\tau)\,, \tag{7}$$

где $v(\tau)$ - скорость ракеты в момент времени τ. Таким образом, искомая функция имеет вид

$$X(t,\tau) = x(\tau) + (v(\tau)+1)(t-\tau)\,. \tag{8}$$

Очевидно, что имеет смысл рассматривать эту функцию только при $\tau \le t$. Рисунок еще раз иллюстрирует процедуру построения данной функции.



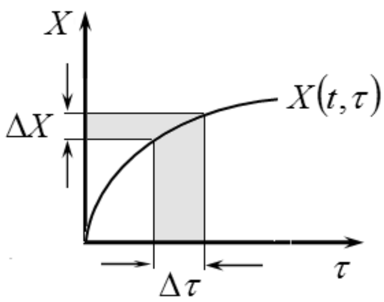
В рассматриваемом случае, когда закон движения описывается функцией (4), $v(\tau) = 2-\tau$, поэтому

$$X(t,\tau) = 2\tau - \frac{\tau^2}{2} + (3-\tau)(t-\tau)\,. \tag{9}$$

Удобно в этой функции выделить полный квадрат:

$$X(t,\tau) = \frac{1}{2}(t+1-\tau)^2 - \frac{(t-2)^2-3}{2}\,. \tag{10}$$

2.3 Построенная функция $X(t,\tau)$ позволяет находить распределение концентрации частиц в шлейфе. Действительно: в малом слое шлейфа толщиной ΔX окажутся частицы, испущенные в соответствующем интервале $\Delta\tau$. Их масса равна $\Delta m = \mu\Delta\tau$, где μ - масса частиц, испускаемых дымовой пушкой в единицу времени. Поэтому концентрация частиц в слое



$$c = \frac{\Delta m}{S\Delta X} = \frac{\mu\Delta\tau}{S\Delta X}\,, \tag{11}$$

где S - площадь поперченного сечения шлейфа.

При неподвижной дымовой пушке, частицы, испущенные за время Δt, окажутся в слое толщиной $u\Delta t$, поэтому их концентрация определяется формулой:

$$c_0 = \frac{\mu\Delta t}{Su\Delta t} = \frac{\mu}{Su}\,. \tag{12}$$

Наконец, разделим равенство (11) на равенство (12), в результате чего получим (кроме того, в общем случае следует взять модули интервалов – нам важны только длины отрезков)

$$c = c_0\frac{u}{\left|\dfrac{\Delta X}{\Delta\tau}\right|}\,. \tag{13}$$

В собственной системе единиц имеет смысл выбрать в качестве единицы концентраций использовать c_0 (или, что равносильно, положить $c_0 = 1$). Тогда концентрация частиц в дымовом следе выражается очень просто:

$$c = \left| \frac{\Delta X}{\Delta \tau} \right|^{-1}. \tag{14}$$

Правда, эта формула определяет концентрацию, как функцию τ. Чтобы перейти к зависимости $c(X)$ можно использовать один и возможных путей:

- выразить τ через X из функции $X(t,\tau)$ и подставить в формулу (14);
- найти обратную функцию к $X(t,\tau)$ - $\tau(X)$ и вычислить ее производную;
- рассматривать выражения (14) и функцию $X(t,\tau)$ как пару функций, определяющих концентрацию $c(X)$ параметрически (где в качестве параметра выступает τ).

Отметим, что все эти способы пригодны, если функция $X(t,\tau)$ является монотонной, когда существует обратная к ней функция. В противном случае, необходим дополнительный анализ.

2.4 – 2.5 Для построения схематического графика функции $X(t,\tau)$ можно воспользоваться следующей процедурой:

- построить график функции $x(\tau)$: банальная парабола, ветви вниз, нули при $t=0$ и $t=4$, максимум при $t=2$, при этом $x=2$;
- функция $X(t,\tau)$ также парабола, ветви вверх, экстремум вне рассматриваемого интервала (в точке $\tau = t = 1$), при $\tau = 0$ $X = 3t$, при $\tau = t$ $X = x(t)$;
- можно «найти» еще одну точку: при $\tau = 3$ скорость частиц дыма равна нулю. Поэтому в этой точке тоже $X = x(t)$.

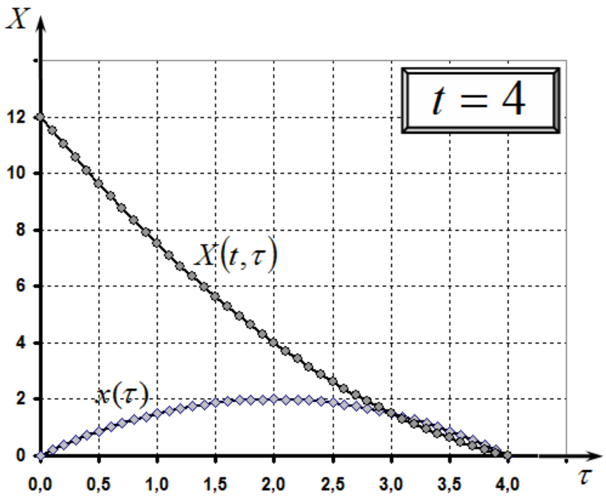
Используя вид функции (10), не сложно найти

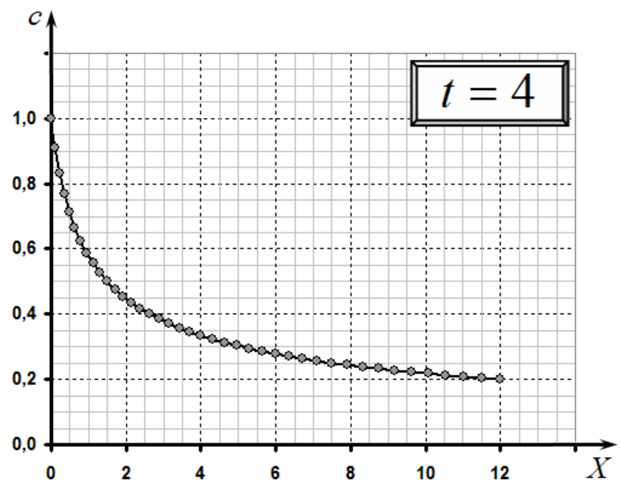
$$\frac{\Delta X}{\Delta \tau} = t + 1 - \tau. \tag{15}$$

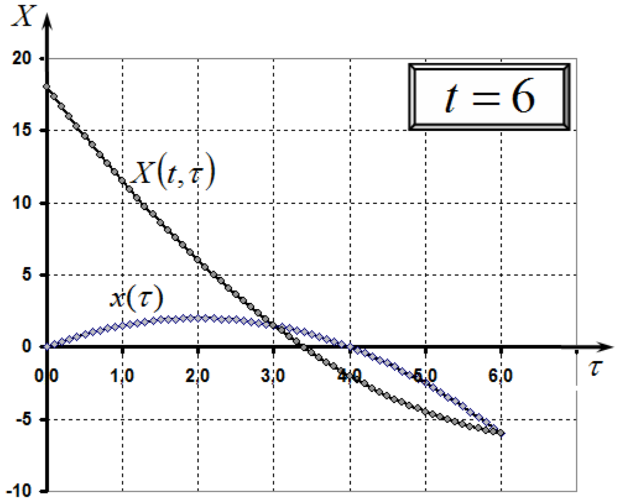
Для построения зависимости концентрации от координаты следует учесть следующее:

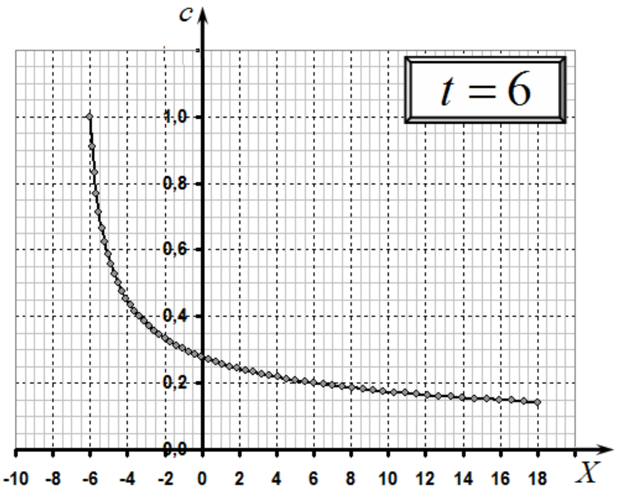
- пределы изменения аргумента в пределах изменения функции $X(t,\tau)$;
- функция монотонно убывающая, выпуклостью вниз;
- при $X = X_{\max}$ (т.е. при $\tau = 0$), как следует из формулы (15) $c = \dfrac{1}{t+1}$;
- при $X = x(\tau)$ (при $\tau = t$) $c = 1$.

Можно также подсчитать значения и в некоторых промежуточных точках.
Графики этих функций показаны на рисунках.

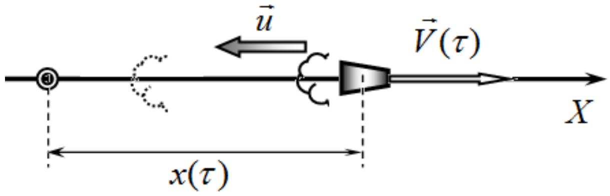








2.6 Первые шаги решения этой части задачи аналогичны рассмотренным ранее.



Для построения функции $X(t,\tau)$ необходимо учесть, что вектор скорости вылетающего дыма направлен в противоположную сторону, поэтому следует записать

$$X(t,\tau) = x(\tau) + (v(\tau) - 1)(t - \tau). \tag{16}$$

При законе движения (4) эта функция задается формулой

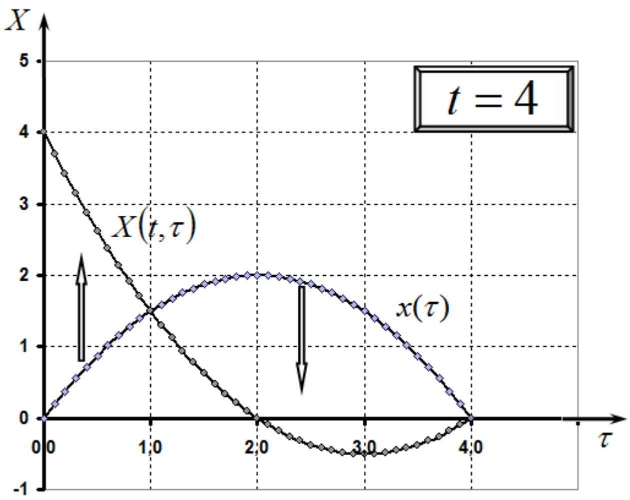
$$X(t,\tau) = 2\tau - \frac{\tau^2}{2} + (1 - \tau)(t - \tau). \tag{17}$$

Выделяя полный квадрат, получим

$$X(t,\tau) = \frac{1}{2}(t - 1 - \tau)^2 - \frac{(t-2)^2 - 3}{2}. \tag{18}$$

На интересует эта функция при $t = 4$.

График этой функции также является параболой, только с одной существенной особенностью: ее минимум попадает внутрь рассматриваемого интервала $\tau \le t$!



Для построения графика этой функции можно использовать следующие точки:

- при $\tau = 0 \quad X = t = 4$;
- при $\tau = t = 4 \quad X = x(t) = 0$;
- вершина параболы: $\tau = 3$, $X = -0{,}5$.

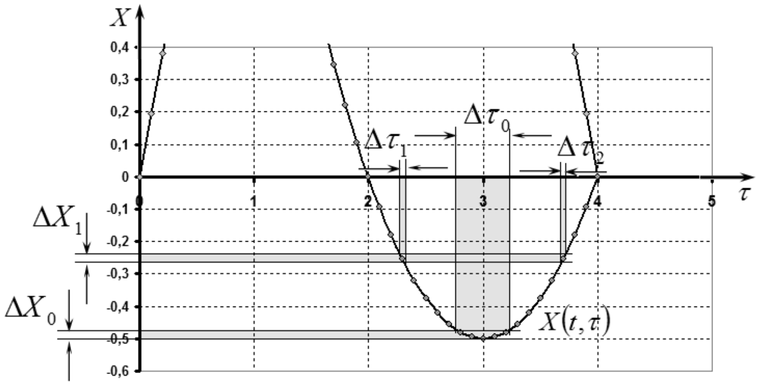
Скорость вылетающих частиц зависит от времени по закону $v - u = 1 - \tau$. Поэтому при $\tau = 1$ эта скорость равна нулю (частицы, вылетевшее в этот момент, покоятся) поэтому $X(t,1) = x(1)$.

Для наглядности, на рисунке указаны стрелки, указывающие направление, в котором движется шлейф после испускания. Так при $\tau < 1$ скорость ракеты больше скорости испускания частиц дыма, поэтому шлейф следует за ракетой, отставая от нее. При $\tau > 1$ частицы шлейфа движутся в отрицательном направлении выбранной оси.

Рисунок показывает, что при $X > 0$ координата однозначно определяется временем испускания. В этой области для расчета распределения концентрации частиц в шлейфе можно использовать процедуру, рассмотренную ранее. Здесь (при $X > 0$ или $0 < \tau < 2$) концентрация определяется формулой:

$$c = \left|\frac{\Delta X}{\Delta \tau}\right|^{-1} = \frac{1}{|t-1-\tau|} = \frac{1}{3-\tau} \quad . \tag{19}$$

В области $X > 0$ одному значению X соответствует два значения τ.

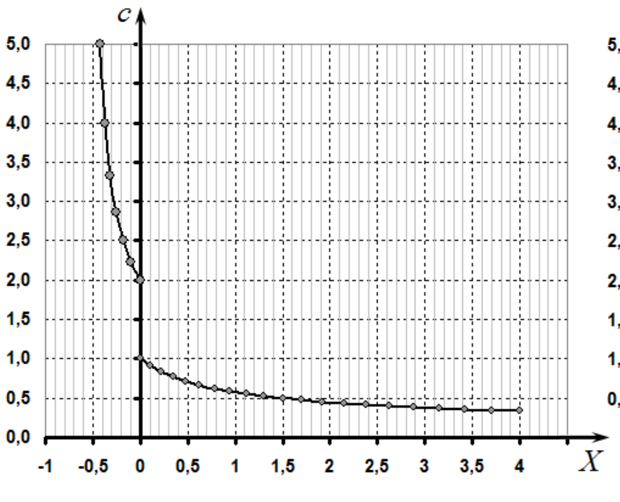


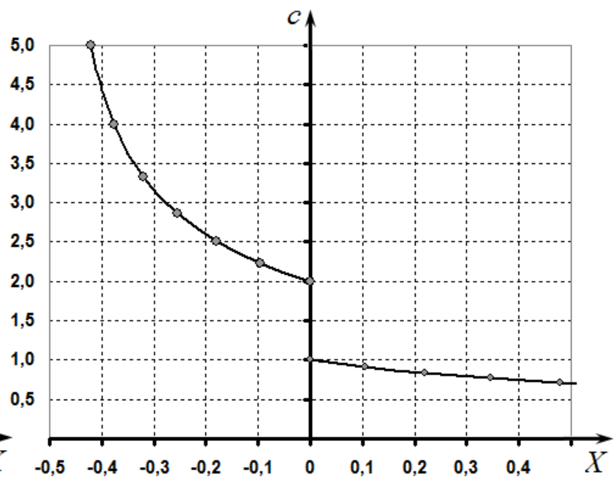
Рассмотрим эту область подробнее. Во-первых, одному малому интервалу ΔX_1 соответствует два малых интервала $\Delta\tau_1$ и $\Delta\tau_2$. Физический смысл этой двузначности следующий: в рассматриваемый момент времени в эту полосу ΔX_1 попадают частицы, испущенные в два интервала времени $\Delta\tau_1$ и $\Delta\tau_2$. Поэтому для расчета концентрации частиц внутри этой полосу необходимо просуммировать обе порции частиц. Легко видеть, что обе эти порции создают одинаковую концентрацию, поэтому в этом интервале концентрацию следует удвоить (при $X < 0$ или $2 < \tau < 3$):

$$c = \frac{2}{3-\tau} \quad . \tag{20}$$

Наконец, при $X = -0{,}5$ (или при $\tau = 3$) концентрация формально стремится к бесконечности. Рисунок поясняет этот вывод: малому интервалу ΔX_0 соответствует гораздо больший интервал $\Delta\tau_0$. Формально в этой точке $\frac{\Delta X}{\Delta \tau} = 0$. Физический смысл этого парадоксального, на первый взгляд, результата понятен: в этот слой попадают частицы, испущенные в течение достаточно длительного промежутка времени.

График зависимости концентрации от координаты показан на рисунке. Также показан этот же график вблизи $X = 0$ в увеличенном масштабе.



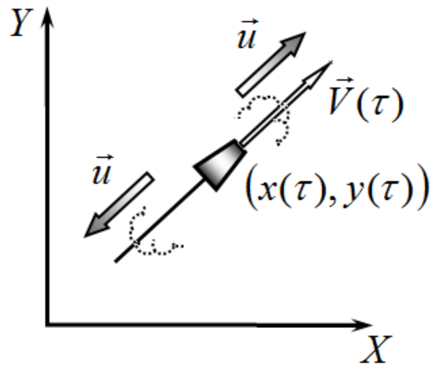


Часть 3. На новой планете.

Эта часть является двумерным развитием одномерной задачи предыдущей части. Необходимо найти координаты частицы в момент времени t, если она была испущена в момент времени τ.

Процедура такого построения аналогична той, которую мы использовали в предыдущей части. Так как ракета движется равномерно с постоянной скоростью $2u$, то закон ее движения имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos 45° \cdot t = \sqrt{2}t \\ y(t) = 2\cos 45° \cdot t = \sqrt{2}t \end{cases}. \qquad (21)$$



После того, как частицы испущены (со скоростью u) далее они движутся с постоянным ускорением равным $\frac{a_0}{2}$, направленным вниз. В собственной системе единиц координаты частиц, испущенных в момент времени τ, в момент t будут равны:

$$\begin{cases} X(t,\tau) = \sqrt{2}\,\tau + \sqrt{2}\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \cdot (t-\tau) \\ Y(t,\tau) = \sqrt{2}\,\tau + \sqrt{2}\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \cdot (t-\tau) - \frac{(t-\tau)^2}{4} \end{cases}. \qquad (21)$$

Знак «плюс» соответствуют частицам, испущенным по направлению движения ракеты, знак «минус», частицам, испущенным в противоположном направлении.

В данном случае можно получить явное выражение для функции, описывающей шлейф дыма. Для этого в уравнениях (21) следует избавиться от τ. Заметим, что

$$Y = X - \frac{(t-\tau)^2}{2}. \qquad (22)$$

Поэтому достаточно из первого уравнения получить выражение для $(t-\tau)$. Проделаем эту процедуру.

$$X(t,\tau) = \sqrt{2}\,\tau + \sqrt{2}\left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \cdot (t-\tau) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{X}{\sqrt{2}} = -(t-\tau) + t + \left(1 \pm \frac{1}{2}\right) \cdot (t-\tau) = t \pm \frac{1}{2}(t-\tau) \quad \Rightarrow$$

$$(t-\tau) = \mp\left(\frac{X}{\sqrt{2}} - t\right)$$

Полученное выражение подставляем в формулу (22) и сразу подставим требуемое значение $t = 3$

$$Y = X - \frac{1}{2}\left(\frac{X}{\sqrt{2}} - 3\right)^2. \qquad (23)$$

поразительно, но оба шлейфа описываются одной функцией! Но они отличаются диапазонами изменения аргумента. Далее найдем, в каких пределах изменяются координаты шлейфа

При $\tau = 0$ $\quad X_+ = \frac{9}{2}\sqrt{2}, \quad X_- = \frac{3}{2}\sqrt{2}$. При $\tau = t$ $\quad X_+ = X_- = 3\sqrt{2}$.

Таким образом, форма шлейфа имеет вид параболы, описываемой уравнением (23), при изменений аргумента X в пределах $X_+ = \frac{9}{2}\sqrt{2}, \quad X_- = \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Гораздо быстрее эту задачу можно решить, если связать систему отсчета с кораблем. Эта система отсчета инерциальная. В этой системе отсчета форма шлейфа совпадает с траекторией частиц. Закон движения частиц имеет вид

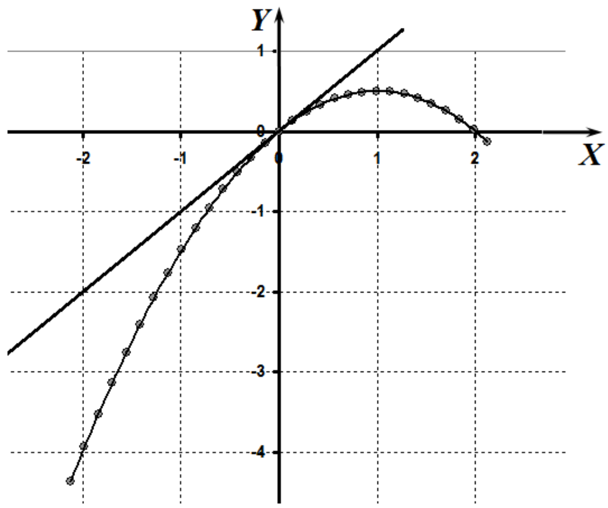
$$\begin{cases} X = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\tau \\ Y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\tau - \frac{\tau^2}{4} \end{cases}. \tag{24}$$

Исключая из системы τ, получим уравнение траектории в явном виде

$$\tau = \sqrt{2}X \quad \Rightarrow \quad Y = X - \frac{X^2}{2}. \tag{25}$$

При изменении X в пределах $\pm\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

График этой функции в указанных пределах показан на рисунке. Прямая линия на рисунке есть траектория движения корабля.



Дополнение (необязательное).

Заметим, что траектории движения всех частиц одинаковы, только начинаются из разных точек. Поэтому можно построить эти траектории. На каждой из них отметить точки, в которых находится частица в равноотстоящие моменты времени. На каждой траектории необходимо выбрать точки соответствующие времени движения от момента испускания до момента, когда наблюдается след $(t-\tau)$. Множество этих точек и будет представлять форму шлейфа. На рисунке показано такое построение. Разными значками отмечены точки шлейфа в разные моменты времени.