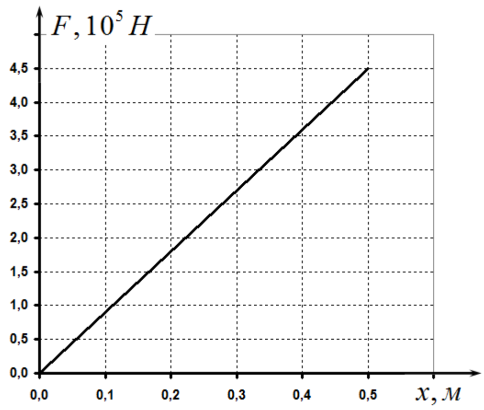
Задача 11-2 Хорошо, что не экспериментальная задача!

Часть 1. Лобовое столкновение автомобиля с упругой преградой.



Так как сила, действующая на автомобиль, пропорциональна смещению автомобиля, то она может быть описана функцией (закон Гука)

$$F = kx. \tag{1}$$

Коэффициент упругости легко может быть найден из графика

$$k = \frac{4{,}5 \cdot 10^5 H}{0{,}5 м} = 9{,}0 \cdot 10^5 \frac{H}{м}. \tag{2}$$

Скорость автомобиля перед столкновением находится из закона сохранения энергии:

$$\frac{Mv_0^2}{2} = \frac{kS^2}{2} \quad \Rightarrow \quad v_0 = S\sqrt{\frac{k}{M}} = 0{,}50\sqrt{\frac{9{,}0 \cdot 10^5}{1{,}0 \cdot 10^3}} = 15\frac{м}{с}. \tag{3}$$

Закон движения автомобиля находится из уравнения второго закона Ньютона

$$Ma = -kx, \tag{4}$$

которое является уравнением гармонических колебаний. Будем считать, что в момент начала столкновения $t = 0$, координата автомобиля равна $x = 0$, а начальная скорость нами найдена. С учетом начальных условий, закон движения имеет вид

$$x = S\sin\omega t, \tag{5}$$

где круговая частота колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = 30 с^{-1}. \tag{6}$$

Время торможения равно четверти периода колебаний

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega} = 5{,}2 \cdot 10^{-2} с = 52 мс. \tag{7}$$

Зависимость скорости и ускорения автомобиля от времени имеют вид:

$$\begin{aligned} v &= S\omega\cos\omega t \\ a &= -S\omega^2\sin\omega t \end{aligned}. \tag{8}$$

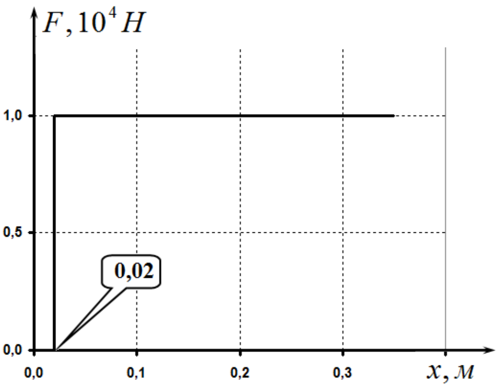
Максимальное ускорение автомобиль испытывает в последний момент торможения, оно равно

$$a_{\max} = S\omega^2 = 450\frac{м}{с^2}. \tag{9}$$

Следовательно, максимальная перегрузка автомобиля равна

$$n = \frac{a_{\max}}{g} = 45. \tag{10}$$

Часть 2. Манекен пристегнут к сидению ремнем безопасности.



Сразу после столкновения манекен продолжает двигаться свободно, перемещаясь на расстояние $l = 2{,}0 см$ относительно автомобиля. Для определения момента времени, когда сработает ремень безопасности можно найти из уравнения

$$v_0 t - S\sin\omega t = l\,. \qquad (11)$$

Это уравнение не может быть решено аналитически, поэтому следует воспользоваться приближенными методами. Предположим, что $\omega t < 1$. В этом случае можно воспользоваться приближенной формулой

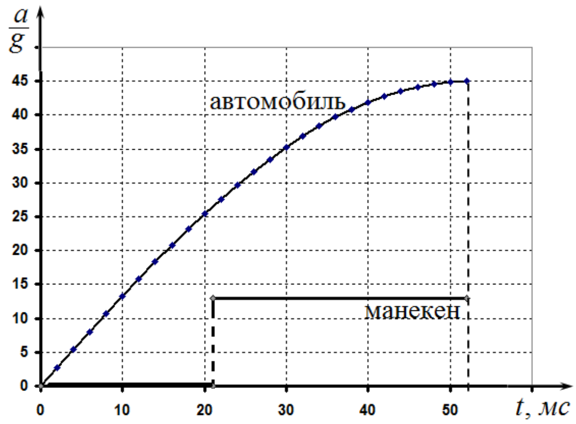
$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{2}\,. \qquad (12)$$

В этом случае решение уравнения принимает значение

$$v_0 t - S\omega t + S\frac{(\omega t)^3}{6} = l \quad\Rightarrow\quad t = \frac{1}{\omega}\sqrt[3]{\frac{6l}{S}} \approx 0{,}021 с = 21 мс\,. \qquad (13)$$

Здесь учтено, что $v_0 = S\omega$. При этом $\omega t \approx 0{,}62$. Так, что предположение о малости этой величины оправдано.

<u>Примечание.</u> Расчет по формуле (13) дает значение 0,0207. Решение методом Ньютона дает значение 0,2085, что подтверждает правомерность использованного приближенного метода.

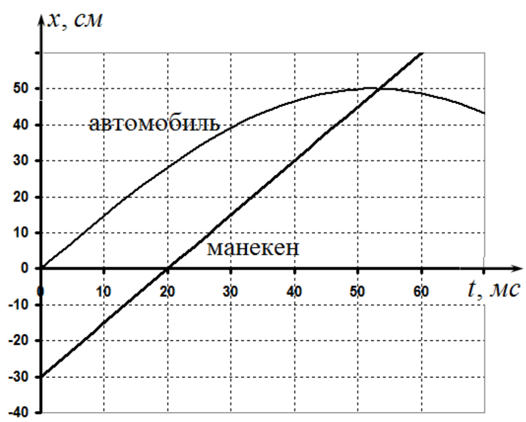


После того, как ремень натянулся, на манекен действует постоянная сила F. В этот промежуток времени перегрузка манекена равна

$$n = \frac{F}{mg} = \frac{1{,}0\cdot 10^4}{75} \approx 13\,. \qquad (14)$$

Зависимости перегрузок автомобиля и манекена от времени показаны на рисунке.

Часть 3. Манекен не пристегнут.



Чтобы определить время, когда манекен ударится о рулевую колонку, необходимо решить уравнение, аналогичное уравнению (11)

$$v_0 t - S\sin\omega t = L\,. \qquad (15)$$

В данном случае, величину ωt нельзя считать малой. Можно провести графический анализ этого уравнения (см. рис.) , но поступим проще: Предположим, что столкновение произошло после остановки автомобиля. В этом случае координата автомобиля оказывается равной S. Следовательно, время движения в этом случае равно

$$t_1 = \frac{S+L}{v_0} = 0{,}053\,c = 53\,мс\,, \tag{16}$$

Что больше, чем время столкновения. Значит, действительно, удар о рулевую колонку произойдет после остановки автомобиля.

Далее манекен ударяется о рулевую колонку. Рассчитаем скорость манекена после того, как рулевая колонка разрушится. Для этого запишем выражение для изменения кинетической энергии манекена, которое равно работе силы сопротивления со стороны рулевой колонки[1]:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = Fd\,. \tag{17}$$

Из этого уравнения находим

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - \frac{2Fd}{m}} = \sqrt{15^2 - \frac{2\cdot 1{,}0\cdot 10^4\cdot 0{,}2}{75}} = 13\frac{м}{с}\,. \tag{18}$$

Это столкновение будет продолжаться в течении промежутка времени

$$\Delta t = \frac{v_0 - v_1}{F}m = \frac{15-13}{1{,}0\cdot 10^4}\cdot 75 = 0{,}015\,c = 15\,мс\,. \tag{19}$$

То есть, это столкновение закончится в момент времени

$$t_2 = t_1 + \Delta t = 68\,мс\,. \tag{20}$$

Перегрузка манекена в этом промежутке времени равна

$$n_2 = \frac{F}{mg} = 13{,}3\,. \tag{21}$$

Далее до столкновения со стеклом манекен будет двигаться свободно со скоростью v_1, пройдя расстояние d. Столкновение со стеклом произойдет в момент времени

$$t_3 = t_2 + \frac{d}{v_1} = 68 + \frac{0{,}2}{13}\cdot 10^3 = 83\,мс\,. \tag{22}$$

Если бы не рулевая колонка, удар манекена о лобовое стекло произошел бы в момент времени

$$t_3' = \frac{S+L+2d}{v_0} = 80\,мс\,. \tag{23}$$

Наконец, осталось рассмотреть удар о стекло. Для оценок приме, что силы, действующая со стороны стекла примерно постоянна. Тогда ускорение, с которым движется манекен в этом приближении можно найти по формуле:

$$\Delta x = \frac{v_1^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v_1^2}{2\Delta x} = 1690\frac{м}{с}\,. \tag{24}$$

Следовательно, перегрузка во время этого удара равна

$$n_4 \approx 170\,. \tag{25}$$

Время этого удара $\Delta t_4 = \frac{2\Delta x}{v_1} \approx 8\,мс$. Поэтому манекен остановится в момент времени $t_4 = 91\,мс$.

Не пристегнутый манекен столкнется со стеклом в момент времени t_3', со скоростью v_0 его перегрузка в момент удара будет равна

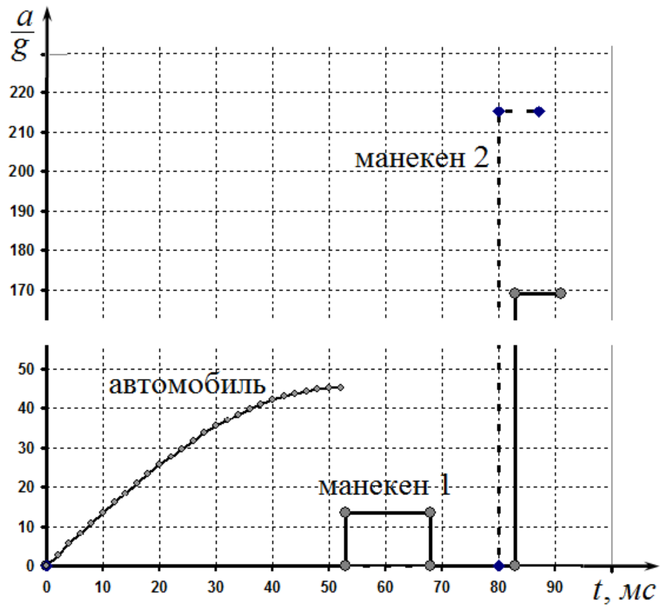
$$n_4' = \frac{v_0^2}{2g\Delta x} = 225\,. \tag{26}$$

---

[1] Либо равносильное кинематическое соотношение.

Удар будет продолжаться в течение промежутка

$$\Delta t_4' = \frac{2\Delta x}{v_0} \approx 6{,}7\,мс\,. \qquad (27)$$



Полученные данные позволяют построить графики зависимости перегрузки от времени в ходе столкновения.