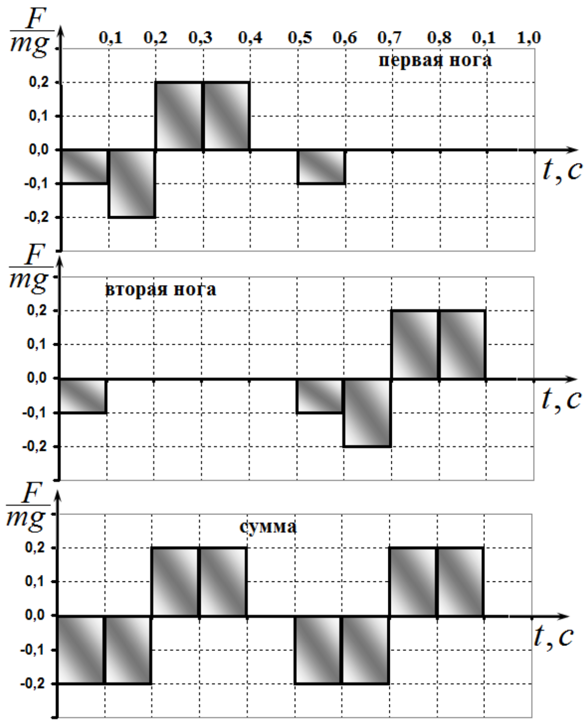
Задача 9-3 Ходьба человека

Часть 1. Продольная составляющая силы реакции.

1.1 Так как человек делает два шага в секунду, то касание второй ногой происходит ровно через 0,5 секунды. Значит, на участках от 0,1 до 0,2 секунд и от 0,5 до 0,6 человек касается поверхности обеими ногами. Для расчета горизонтального ускорения необходимо просуммировать силы, действующие на обе ноги. Для наглядности такое суммирование проведено в таблице 1 и на графиках.

Таблица 1. Суммарная горизонтальная сила.

Интервал (с)	$\frac{F_1}{mg}$ (1 нога)	$\frac{F_2}{mg}$ (2 нога)	$\frac{F_\Sigma}{mg}$ (сумма)
0,0-0,1	-0,1	-0,1	-0,2
0,1-0,2	-0,2	0	-0,2
0,2-0,3	0,2	0	0,2
0,3-0,4	0,2	0	0,2
0.4-0,5	0	0	0
0,5-0,6	-0,1	-0,1	-0,2
0,6-0,7	0	-0,2	-0,2
0,7-0,8	0	0,2	0,2
0,8-0,9	0	0,2	0,2
0,9-1,0	0	0	0



На каждом временном промежутке в 0,1 с суммарная сила постоянна, поэтому ускорение центра масс человека также постоянно. Оно рассчитывается по 2 закону Ньютона:

$$a = \frac{F_\Sigma}{m} \qquad (1).$$

График зависимости горизонтального ускорения от времени показан на рис. 2.

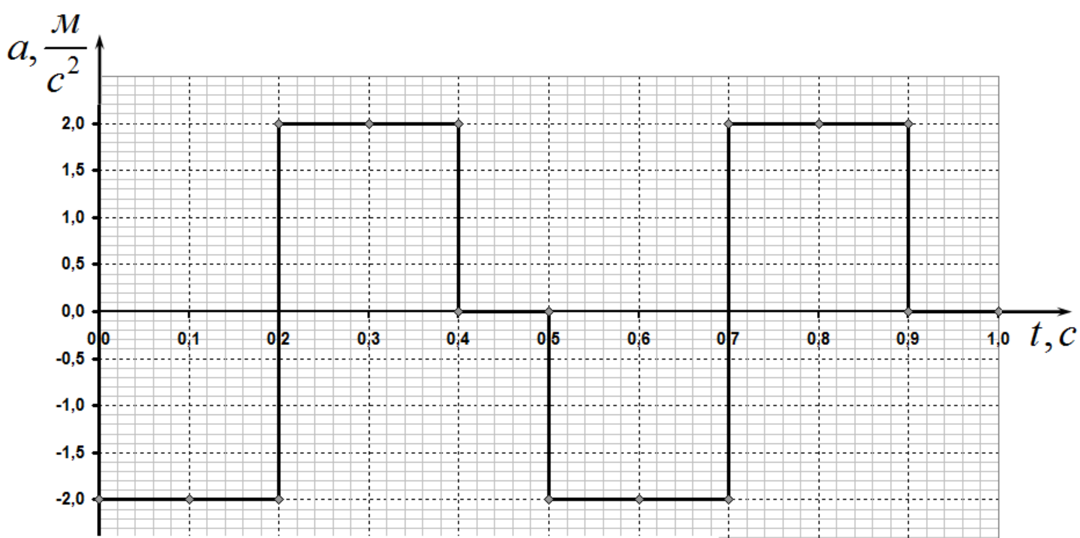


Рис. 2 Зависимость горизонтальной составляющей ускорения центра масс человека от времени.

Для расчета зависимости скорости от времени необходимо знать начальную скорость. Но нам известна только средняя скорость $v_{ср}$ за один шаг. График зависимости ускорения от времени позволяет легко рассчитать зависимость изменения скорости $\Delta v = v_i - v_0$, где v_i - скорость в конце i-го интервала времени. Суммарное смещение центра масс за один шаг можно по формуле

$$S = \sum_i \left(v_0 + (\Delta v_i)_{ср} \Delta t\right) = v_0 T + \sum_i (\Delta v_i)_{ср} \Delta t \,, \qquad (2)$$

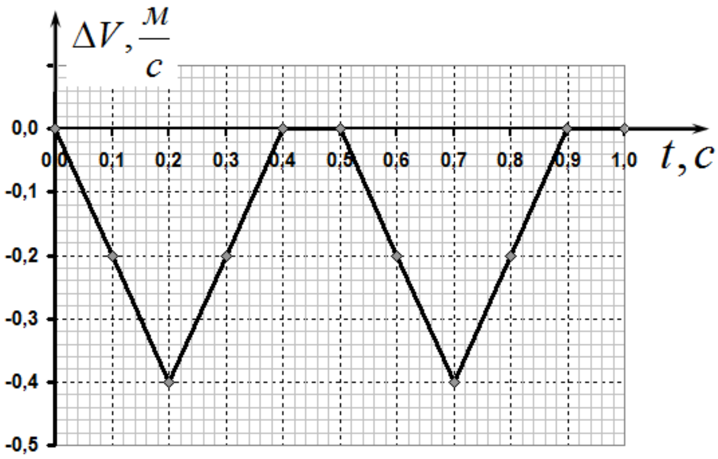
где $(\Delta v_i)_{ср}$ - средняя скорость на i - том интервале. Теперь среднюю скорость за полный шаг можно выразить как

$$v_{ср.} = \frac{S}{T} = v_0 + \frac{1}{T} \sum_i (\Delta v_i)_{ср} \Delta t \,. \qquad (3)$$

Это соотношение позволяет найти начальную скорость v_0.
Результаты расчетов приведены в Таблице 2. На рисунке 3 построен график зависимости величины Δv от времени.

Таблица 2. Расчет зависимости горизонтальной скорости от времени.

t, c	$a, \frac{м}{c^2}$	$\Delta v, \frac{м}{c}$	$v, \frac{м}{c}$
0	4	0	-0,08
0,1	4	0,4	0,32
0,2	-2	0,2	0,12
0,3	-2	0	-0,08
0,4	-2	-0,2	-0,28
0,5	2	0	-0,08
0,6	4	0,4	0,32
0,7	-2	0,2	0,12
0,8	-2	0	-0,08
0,9	-2	-0,2	-0,28
1	2	0	-0,08



Очевидно, что сумма в выражении (2) численно равна площади под графиком зависимости $\Delta v(t)$. Эта площадь подсчитывается элементарно:

$$\sum_i (\Delta v_i)_{ср} \Delta t = -2 \cdot \frac{1}{2} 0{,}4 \cdot 0{,}4 = -0{,}16 м \,.$$

Теперь из соотношения (3) определяем начальную скорость

$$v_0 = v_{ср.} - \frac{1}{T} \sum_i (\Delta v_i)_{ср} \Delta t = 1{,}16 \frac{v}{c} \qquad (4)$$

Эту скорость следует прибавить к значениям величин $\Delta v(t)$, в результате чего, получим искомую зависимость $v(t)$. График этой зависимости показан на рис. 4.

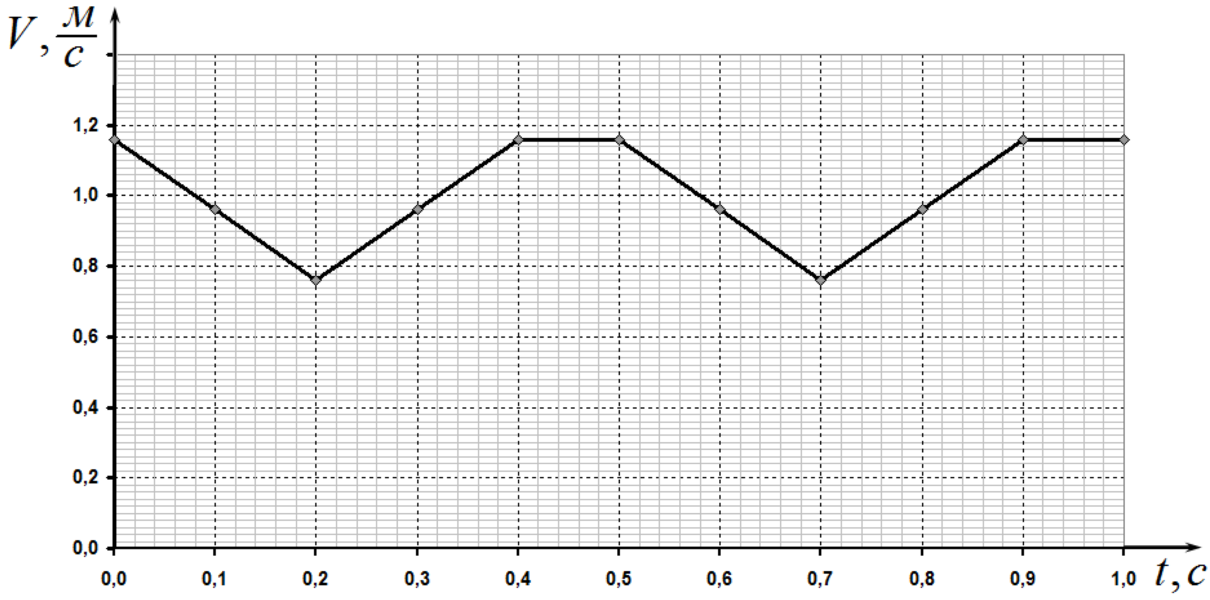


Рис. 4 Зависимость горизонтальной составляющей скорости центра масс человека от времени.

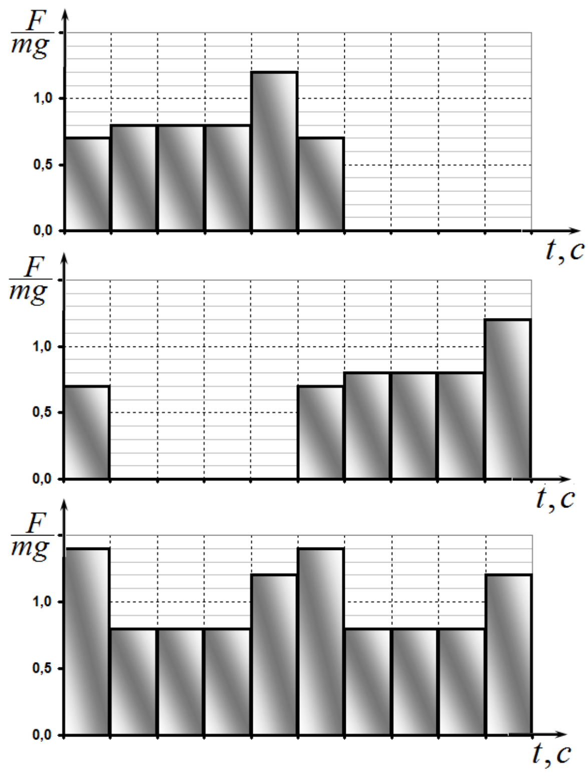
Часть 2. Нормальная составляющая силы реакции.

Расчет зависимости вертикальной скорости центра масс от времени проводится полностью аналогично.

В Таблице 3 и на рисунках показана зависимость вертикальной составляющей силы от времени (с учетом суммирования в тех интервалах, где обе ноги находятся на земле).

Таблица 3. Суммарная вертикальная сила.

Интервал (с)	$\frac{F_1}{mg}$ (1 нога)	$\frac{F_2}{mg}$ (2 нога)	$\frac{F_\Sigma}{mg}$ (сумма)
0,0-0,1	0,7	0,7	1,4
0,1-0,2	0,8	0	0,8
0,2-0,3	0,8	0	0,8
0,3-0,4	0,8	0	0,8
0.4-0,5	1,2	0	1,2
0,5-0,6	0,7	0,7	1,4
0,6-0,7	0	0,8	0,8
0,7-0,8	0	0,8	0,8
0,8-0,9	0	0,8	0,8
0,9-1,0	0	1,2	1,2



Вертикальное ускорение центра масс рассчитывается по формуле

$$a = \left(\frac{F_\Sigma}{mg} - 1 \right) g \tag{5}$$

График этой зависимости приведен на рис. 6.

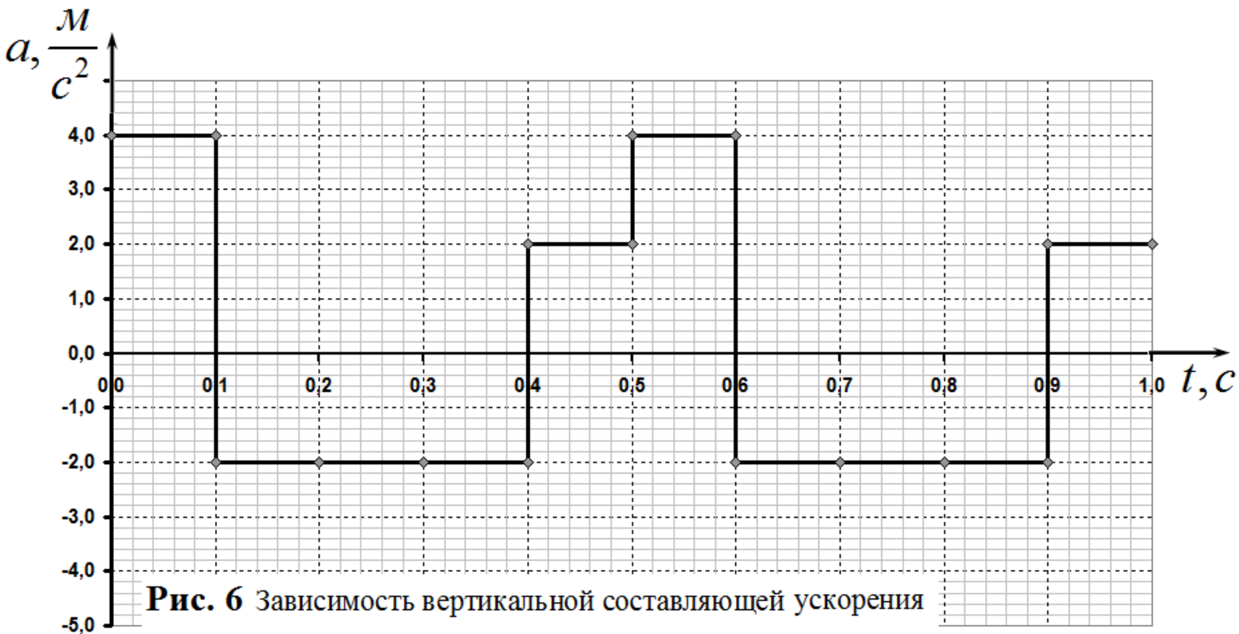
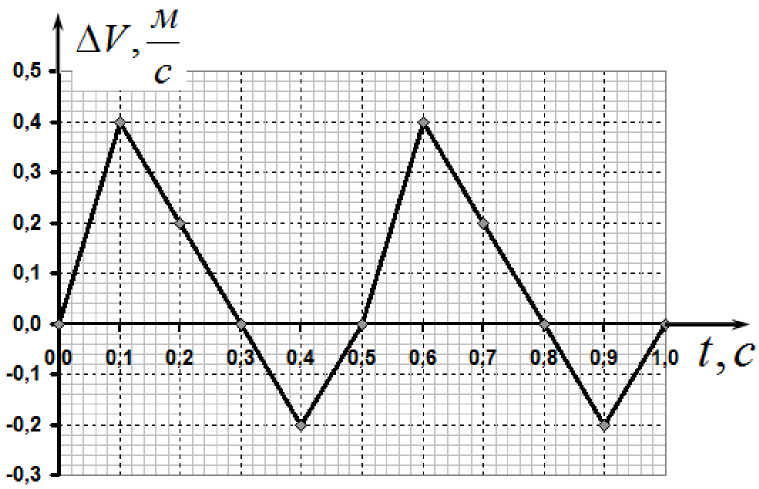


Рис. 6 Зависимость вертикальной составляющей ускорения центра масс человека от времени.

В Таблице 4 показаны результаты расчета изменения вертикальной скорости от времени, а на рис. 7 зависимость величины Δv от времени.

Таблица 4. Расчет зависимости горизонтальной скорости от времени.

t, c	$a, \frac{м}{c^2}$	$\Delta v, \frac{м}{c}$	$v, \frac{м}{c}$
0	4	0	-0,08
0,1	4	0,4	0,32
0,2	-2	0,2	0,12
0,3	-2	0	-0,08
0,4	-2	-0,2	-0,28
0,5	2	0	-0,08
0,6	4	0,4	0,32
0,7	-2	0,2	0,12
0,8	-2	0	-0,08
0,9	-2	-0,2	-0,28
1	2	0	-0,08



Расчет площади под графиком зависимости $\Delta v(t)$ приводит к результату

$$\sum_i (\Delta v_i)_{cp} \Delta t = 2\left(\frac{1}{2}0{,}4 \cdot 0{,}3 - \frac{1}{2}0{,}2 \cdot 0{,}2\right) = 0{,}08\, м\,.$$

Теперь из соотношения (3) определяем начальную скорость (с учетом, того, что средняя вертикальная скорость равна нулю):

$$v_0 = -\frac{1}{T}\sum_i (\Delta v_i)_{cp} \Delta t = -0{,}08\frac{м}{c} \qquad (4)$$

Эту скорость следует прибавить к значениям величин $\Delta v(t)$, в результате чего, получим искомую зависимость $v(t)$. График этой зависимости показан на рис. 8.

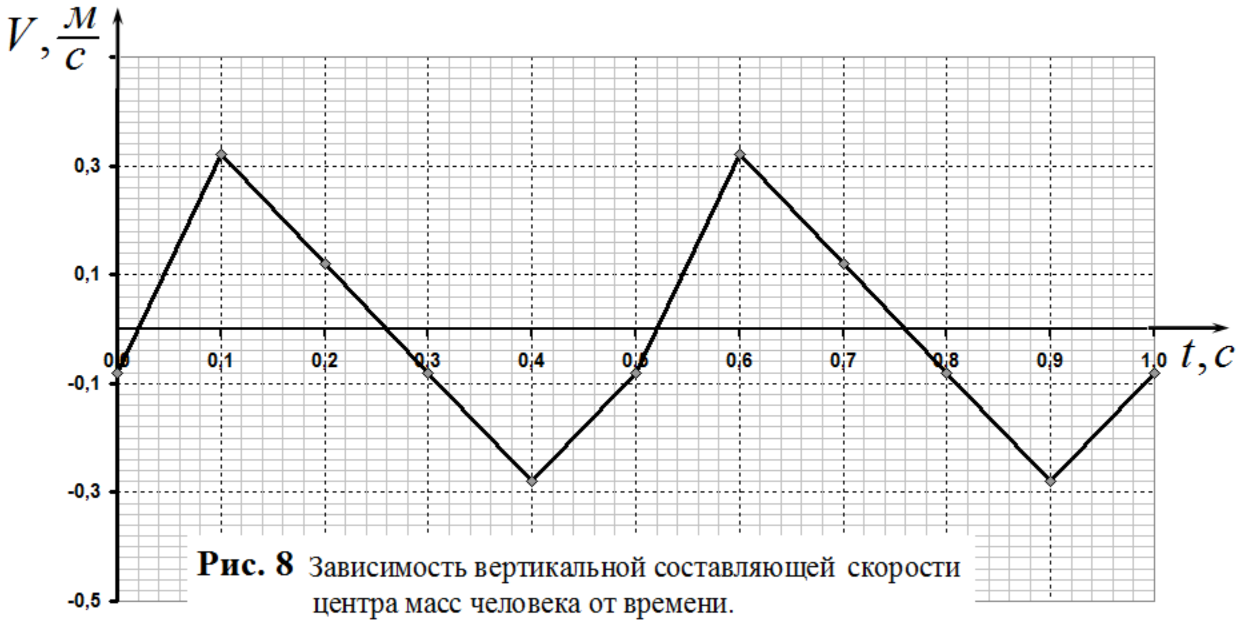


Рис. 8 Зависимость вертикальной составляющей скорости центра масс человека от времени.

Часть 3. Превращение энергии.

Кинетическая энергия тела равна

$$E_k = \frac{m}{2}\left(v_x^2 + v_2^2\right). \tag{5}$$

Используя данные расчетов скоростей, можно рассчитать кинетическую энергию тела в «узловых точках». Результаты этих расчетов приведены в Таблице 5. График полученной зависимости показан на рис. 9.

Таблица 5. Расчет зависимости кинетической энергии от времени.

t, c	$v_x, \frac{м}{с}$	$v_y, \frac{м}{с}$	$E_k, дж$
0	1,16	-0,08	54,08
0,1	0,96	0,32	40,96
0,2	0,76	0,12	23,68
0,3	0,96	-0,08	37,12
0,4	1,16	-0,28	56,96
0,5	1,16	-0,08	54,08
0,6	0,96	0,32	40,96
0,7	0,76	0,12	23,68
0,8	0,96	-0,08	37,12
0,9	1,16	-0,28	56,96
1	1,16	-0,08	54,08

Для расчета потенциальной энергии $(U = mgh)$ необходимо построить график зависимости вертикальной координаты от времени. Так как на всех временных интервалах ускорение постоянно, то соответствующей зависимости будет состоять из отрезков парабол. Значения вертикальной координаты в «узловых точках» рассчитывается традиционным образом, как площадь под графиком зависимости $v(t)$. Результаты расчетов представлены в Таблице 6, график показан на рисунке 10.

Таблица 6. Расчет зависимости потенциальной энергии от времени.

t, c	$v_y, \frac{м}{c}$	h, $м$	$U, дж$
0	-0,08	0	0
0,1	0,32	0,012	9,6
0,2	0,12	0,034	27,2
0,3	-0,08	0,036	28,8
0,4	-0,28	0,018	14,4
0,5	-0,08	0	0
0,6	0,32	0,012	9,6
0,7	0,12	0,034	27,2
0,8	-0,08	0,036	28,8
0,9	-0,28	0,018	14,4
1	-0,08	0	0

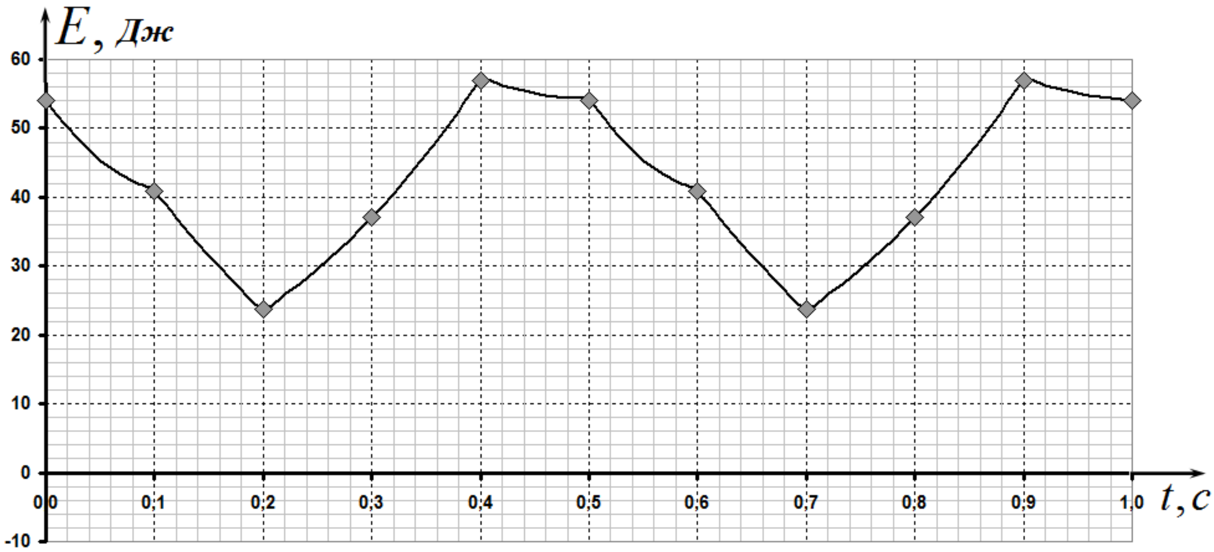


Рис. 9 Зависимость кинетической энергии от времени

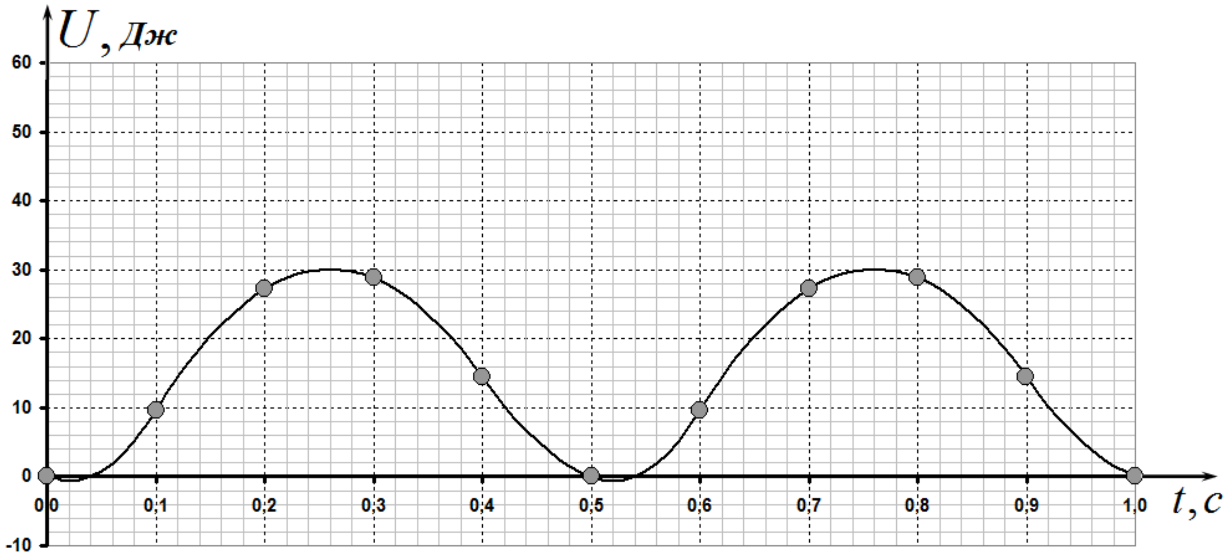
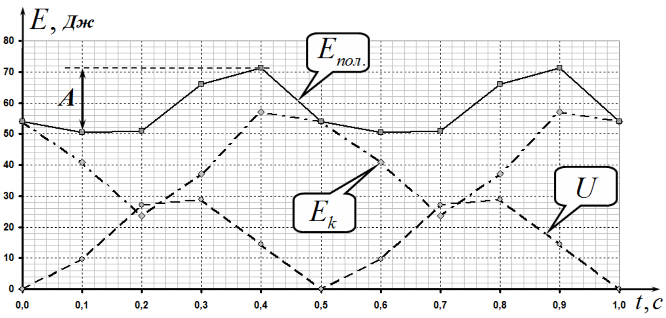


Рис. 10 Зависимость потенциальной энергии от времени

Кинетическая энергия изменяется в пределах примерно от 24 Дж до 57 Дж, то есть, на 33 Дж. Потенциальная энергия изменяет от 0 до 29 Дж. Диапазоны изменения кинетической и потенциальной энергии примерно совпадают.

Дополнение (в решении не требуется). Интересно оценить, какую мощность развивает человек при ходьбе. Для этого построим график зависимости полной энергии человека от времени. Человек совершает работу на тех интервалах, когда полная энергия растет. При убыли полной энергии эта энергия человеку не возвращается. На рисунке отмечен такой участок.



Простой расчет показывает, что средняя мощность, развиваемая человеком при ходьбе, примерно равна 30 Вт.

Задача 10-1 Погреемся на солнышке?

Часть 1. Почему черное теплее?

1.1 Рассчитаем коэффициент теплоотдачи в рамках заданной модели. За промежуток времени Δt на поверхность пластинки попадет количество молекул

$$N = \frac{1}{4} n \langle v \rangle S \Delta t = \frac{1}{4} n S \Delta t \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}} \qquad (1)$$

Где T_0 — абсолютная температура воздуха. Поскольку «молекулы» воздуха двухатомные, то средняя энергия каждой подлетающей молекулы $\langle E_1 \rangle = \frac{5}{2} kT_0$, где k – постоянная Больцмана.

После контакта с пластинкой (согласно условию) каждая молекула увеличит свою энергию до среднего значения, соответствующего абсолютной температуре T пластинки $\langle E_2 \rangle = \frac{5}{2} kT$. Увеличение средней энергии каждой молекулы составит величину

$$\langle \Delta E \rangle = \frac{5}{2} k (T - T_0). \qquad (2)$$

Следовательно, суммарное количество энергии, уносимой всеми молекулами от пластинки за промежуток времени Δt равно

$$\Delta E = N \langle \Delta E \rangle = \frac{1}{4} n S \Delta t \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}} \cdot \frac{5}{2} k (T - T_0) = \frac{5}{8} kn S \Delta t \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}} \cdot (T - T_0) = qS\Delta t\ . \qquad (3)$$

Сравнивая выражение (4) с выражением (3) в условии, найдем значение коэффициента теплоотдачи в рамках данной модели

$$a = \frac{5}{8} kn \sqrt{\frac{8RT_0}{\pi M}}. \qquad (4)$$

Выражая концентрацию молекул воздуха из уравнения Клапейрона-Менделеева $n = \frac{P_0}{kT_0}$, получим