Машина по изготовлению льда. Решение

1. Подготовка

1.1. В исходном состоянии давление, температура и объём газа равны соответственно p_0, $T_{комн}$, V_1. Запишем уравнение состояния идеального газа:

$$p_0 V_1 = \nu R T_{комн} \tag{1}$$

Откуда следует:

$$\nu = \frac{p_0 V_1}{R T_{комн}} = \frac{101 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot 5{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 293 \text{ К}} = 0{,}207 \text{ моль}$$

1.2. При адиабатическом «растягивании» на первом этапе газ будет охлаждаться. Далее, за счет теплообмена с водой, он будет иметь возможность заморозить её, только если температура газа окажется ниже температуры замерзания воды.

Пусть после увеличения объёма газа до V_2 на первом этапе температура газа стала равной T^*. Тогда необходимым условием для изготовления льда будет $T^* < T_л$. Так как процесс на первом этапе адиабатический, то справедливо соотношение:

$$T_{комн} V_1^{\gamma-1} = T^* V_2^{\gamma-1} \tag{4}$$

Условию $T^* < T_л$ тогда соответствует:

$$V_2 > V_1 \left(\frac{T_{комн}}{T_л}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{5}$$

То есть минимальный объём:

$$V_{2\,min} = V_1 \left(\frac{T_{комн}}{T_л}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 5{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 \cdot \left(\frac{293 \text{ К}}{273 \text{ К}}\right)^{\frac{1}{\frac{7}{5}-1}} = 5{,}97 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 5{,}97 \text{ л}$$

2. Кристаллизация

2.1. Примерная диаграмма, иллюстрирующая описанный процесс, изображена на рис. 1

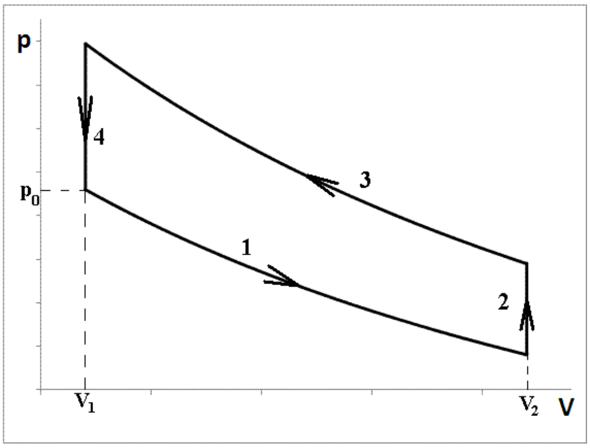

Рисунок 1

Участок 1 – адиабатическое сжатие до объёма V_2, далее на участке 2 газ изохорно нагревается за счёт теплообмена с замерзающей водой. Теплообмен идёт до тех пор, пока температура газа не сравняется с температурой кристаллизации воды $T_л$. Далее участок 3 представляет собой адиабатическое сжатие до начального объёма V_1. Наконец, участок 4 – изохорное охлаждение газа до комнатной температуры.

2.2. Используя постоянство произведения $TV^{\gamma-1}$ для адиабатического процесса на участке 1, найдём температуру газа T^* в конце данного участка:

$$T^* = T_{комн} \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} = 293 \text{ К} \cdot \left(\frac{5{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}{7{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3}\right)^{\frac{7}{5}-1} = 256{,}10 \text{ К} \tag{6}$$

(Запасные цифры после запятой взяты не из соображений физической точности, а для того, чтобы уменьшить вклад погрешности округлений, способных оказать значительное влияние на результат в данной задаче).

Далее на участке 2 будет происходить изохорный теплообмен между газом и замерзающей водой, пока газ не нагреется до $T_л$. Запишем уравнение теплового баланса.

$$C_V(T_л - T^*) = \lambda \Delta m \qquad (7)$$

Тогда масса льда, образующегося за один цикл равна:

$$\Delta m = \frac{C_V(T_л - T^*)}{\lambda} = \frac{4{,}30\frac{Дж}{К} \cdot (273{,}00\ К - 256{,}10\ К)}{3{,}3 \cdot 10^5 \frac{Дж}{кг}} = 0{,}220\ г$$

2.3. Чтобы заморозить всю воду в стакане, необходимо произвести количество циклов:

$$N = \frac{m}{\Delta m} = \frac{0{,}20\ кг}{0{,}220 \cdot 10^{-3}\ кг} = 909 \qquad (8)$$

2.4. После прохождения одного цикла газ возвращается в исходное состояние, значит изменение внутренней энергии газа за один цикл равно нулю. Тогда, исходя из первого начала термодинамики, работа, которую Федя совершает над газом, расходуется на теплопередачу другим телам. Для изучаемого цикла:

$$A = Q_{окр} - Q_{воды} \qquad (9)$$

где $Q_{окр}$ – количество теплоты, отданное в окружающую среду на 4 этапе цикла, $Q_{воды}$ – количество теплоты, полученное при кристаллизации воды на 2-м участке цикла. Выражение для $Q_{воды}$ мы уже записали в (7), чтобы рассчитать $Q_{окр}$ необходимо сначала найти температуру газа после окончания третьего этапа цикла. Для этого применим условие постоянства $TV^{\gamma-1}$ к адиабатическому сжатию газа. Температура T^{**} в конце сжатия оказывается равной:

$$T^{**} = T_л\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} = 273\ К \cdot \left(\frac{7{,}0 \cdot 10^{-3}\ м^3}{5{,}0 \cdot 10^{-3}\ м^3}\right)^{\frac{7}{5}-1} = 312{,}33\ К \qquad (10)$$

Тогда из (9) получаем выражение для работы, совершаемой Федей за один цикл:

$$A = C_V(T^{**} - T_{комн}) - C_V(T_л - T^*) = C_V(T^* + T^{**} - T_{комн} - T_л) \qquad (11)$$

$$A = 4{,}30\frac{Дж}{К}(256{,}10\ К + 312{,}33\ К - 293{,}00\ К - 273{,}00\ К) = 10{,}45\ Дж$$

2.5. Логичным и естественным способом введения КПД для холодильника является подсчет количества энергии, забираемого у охлаждаемого тела по отношению к совершённой работе. В нашем случае это равно $\eta = \frac{Q_{воды}}{A}$. Данная величина действительно описывает эффективность холодильной машины: из двух устройств выгоднее то, у которого η больше. Однако, непривычное в таком определении КПД то, что он, вообще говоря, может оказаться большим единицы. Тем не менее, именно указанный способ подсчёта мы и будем использовать в дальнейшем. Получаем:

$$\eta = \frac{Q_{воды}}{A} = \frac{C_V(T_л - T^*)}{A} = \frac{4{,}30\frac{Дж}{К}(273{,}00\ К - 256{,}10\ К)}{10{,}45\ Дж} = 6{,}95 = 695\ \% \qquad (12)$$

Еще раз отметим, что данный результат вполне корректен, а столь большое значение получилось вследствие введённого определения КПД. Нет никаких причин требовать КПД быть меньшим единицы: действительно, ведь $Q_{воды}$ представляет собой не часть расходов энергии, на которые «тратится» совершённая работа A, а, наоборот, является поступлением теплоты в рабочий газ.

2.6. Максимальную силу F_{max} Феде придётся приложить к поршню в тот момент, когда давление газа будет максимально отличаться от атмосферного. Из P-V диаграммы процесса (рис. 1) замечаем, что это может произойти в конце этапа 1 или этапа 3 цикла. Давление p^* в конце этапа 1 найдём из уравнения состояния идеального газа:

$$p^* = \frac{\nu R T^*}{V_2} = \frac{0{,}207\ \text{моль} \cdot 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 256{,}10\ \text{К}}{7{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3} = 6{,}29 \cdot 10^4\ \text{Па} \tag{13}$$

Аналогично давление p^{**} в конце этапа 3 равно:

$$p^{**} = \frac{\nu R T^{**}}{V_1} = \frac{0{,}207\ \text{моль} \cdot 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}} \cdot 312{,}33\ \text{К}}{5{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3} = 1{,}07 \cdot 10^5\ \text{Па} \tag{14}$$

Сила, которую прикладывает Федя, с учётом атмосферного давления, действующего на поршень снаружи, будет равна:

$$F = |p - p_0| S \tag{15}$$

В двух рассматриваемых состояниях получаем:

$$F^* = |p^* - p_0| S = |6{,}29 \cdot 10^4\ \text{Па} - 10{,}1 \cdot 10^4\ \text{Па}| \cdot 8{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2 = 304\ \text{Н}$$

$$F^{**} = |p^{**} - p_0| S = \left|1{,}07 \cdot 10^5\ \text{Па} - 1{,}01 \cdot 10^5\ \text{Па}\right| \cdot 8{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2 = 48{,}0\ \text{Н}$$

Таким образом, $F_{max} = 304$ Н.

Из п.2.4 нам известна работа, совершаемая Федей за один цикл. При этом поршень проходит путь равный:

$$l = 2\frac{V_2 - V_1}{S} = 2\frac{7{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3 - 5{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3}{8{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2} = 0{,}50\ \text{м} \tag{16}$$

Средний модуль силы тогда можно найти через выражение для работы силы.

$$F_{\text{ср}} = \frac{A}{l} = \frac{8{,}6\ \text{Дж}}{0{,}50\ \text{м}} = 17{,}2\ \text{Н} \tag{17}$$

3. Охлаждение и кристаллизация

3.1. Второй этап цикла длится до наступления теплового равновесия. В предыдущей части задачи оно наступало, когда рабочий газ нагревался до температуры кристаллизации $T_л$ воды. Теперь во время теплообмена с рабочим газом вода будет охлаждаться, и конечная температура установившегося теплового равновесия в конце второго этапа цикла заранее неизвестна. Более того, в результате охлаждения на данном этапе, в начале каждого цикла вода будет находиться при меньшей температуре, чем на предыдущем. Значит, и температура установившегося теплового равновесия будет с каждым циклом уменьшаться. Согласно уравнению состояния идеального газа, при постоянном объёме с температурой будет уменьшаться и давление. Таким образом, общий вид диаграммы процесса для трёх последовательный циклов приведён на рис. 2.

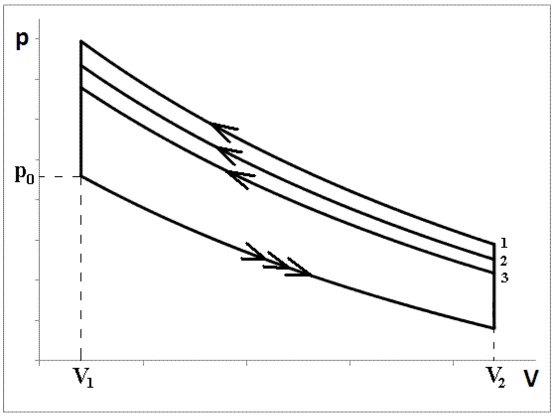

Рисунок 2

Температура равновесного состояния и давление в конце второго этапа будут падать с каждым последующим циклом до тех пор, пока не будет достигнута температура кристаллизации воды. Дальше процесс пойдёт аналогично рассмотренному в предыдущем пункте задачи.

3.2. Уравнение теплового баланса (7) в данном случае примет вид:

$$C_V(T_{n+1} - T^*) = c_в m(T_n - T_{n+1}) \tag{18}$$

Откуда можно выразить искомую зависимость:

$$T_{n+1} = \frac{c_в m T_n + C_V T^*}{c_в m + C_V} \quad (19)$$

где значение T^* было найдено в п.2.2 – уравнение (6).

3.3. Выражение (19) можно переписать в следующем виде:

$$T_{n+1} = \frac{c_в m T_n - c_в m T^* + c_в m T^* + C_V T^*}{c_в m + C_V} = \frac{c_в m (T_n - T^*)}{c_в m + C_V} + T^*$$

$$T_{n+1} - T^* = \frac{c_в m (T_n - T^*)}{c_в m + C_V}$$

Вводя новую величину $x_n \equiv T_n - T^*$, получим связь x_{n+1} и x_n, описывающую геометрическую прогрессию: $x_{n+1} = q x_n$, где знаменатель равен:

$$q = \frac{c_в m}{c_в m + C_V} = \frac{4200 \frac{Дж}{кг \cdot К} \cdot 0{,}20\ кг}{4200 \frac{Дж}{кг \cdot К} \cdot 0{,}20\ кг + 4{,}30 \frac{Дж}{К}} = 0{,}995$$

Чтобы найти количество циклов до начала замерзания воды, необходимо найти номер члена данной прогрессии, при котором T_n станет равным температуре кристаллизации воды $T_л$. Подставляя начальную и конечную температуры, имеем для величины x:

$$x_0 = T_{комн} - T^* = 293\ К - 256{,}10\ К = 36{,}90\ К$$

$$x_N = T_л - T^* = 273\ К - 256{,}10\ К = 16{,}90\ К$$

Так как $x_N = x_0 q^N$, получаем:

$$q^N = \frac{x_N}{x_0}$$

$$(0{,}995)^N = 0{,}458$$

Необходимо из данного уравнения найти N. В математике функция, позволяющая найти степень при известном основании и результату возведения, называется логарифмом. Однако, даже не используя подобную терминологию, ответ можно подобрать, используя инженерный калькулятор: пробуя степени сначала грубо (50, 100, 150, 200), затем около искомого значения более точно. Можно обнаружить, что наиболее точно подходит значение $N = 156$.

Наконец, грубую оценку величины N можно получить и без калькулятора. Записав возведение в виде $(0{,}995)^N = (1 - 0{,}005)^N$ и воспользовавшись приближённой формулой $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ для малых x, получим $1 - 0{,}005N \approx 0{,}458$. Откуда следует $N \approx 108$.

Чтобы обратить в лёд всю воду, необходимо к найденному количеству циклов N охлаждения воды прибавить количество циклов, необходимых для её замораживания из предыдущей части задачи.

$$N_{полн} = N + N_{замораж} = 156 + 909 = 1065$$

3.4. Для нахождения КПД необходимо посчитать работу Феди и количество теплоты, забираемой у воды за цикл при её охлаждении.

Температура после адиабатического сжатия (третьего этапа цикла) теперь уже будет зависеть от номера цикла – T_n^{**}, как и температура равновесного состояния газ-вода. Однако связь между ними останется всё той же, определяемой формулой (10). Выражение (11) для работы Феди также остаётся справедливым, если учесть зависимость от номера цикла:

$$A_n = C_V (T^* + T_n^{**} - T_{комн} - T_n) \quad (20)$$

Подставляя выражения (6) и (10) для температур со звёздочками, получаем:

$$A_n = C_V \left(T_{комн} \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - T_{комн} + T_n \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} - T_n \right) = C_V \left(T_{комн} \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - T_n \right) \left(1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} \right) \quad (21)$$

Количество теплоты, забираемой у воды за один цикл, равно:

$$Q_{n\,\text{воды}} = C_V(T_n - T^*) = C_V\left(T_n - T_{\text{комн}}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right) \tag{22}$$

Таким образом, КПД за один цикл оказывается равным:

$$\eta = \frac{Q_{n\,\text{воды}}}{A_n} = \frac{C_V\left(T_n - T_{\text{комн}}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right)}{C_V\left(T_{\text{комн}}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - T_n\right)\left(1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} - 1} \tag{23}$$

Что важно, оказалось, КПД не зависит от температур и номера цикла, а определяется только максимальным и минимальным объёмом газа в ходе процесса. Данное выражение для η можно было получить и в предыдущей части задачи с замерзанием воды, однако там, ввиду постоянства температур, в нём не было необходимости. И действительно, подставив числовые значения, получим тот же результат (с точностью до погрешности округления):

$$\eta = \frac{1}{\left(\frac{7{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3}{5{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^3}\right)^{\frac{7}{5}-1} - 1} = 6{,}94 = 694\ \%$$

3.5. Чтобы всю воду превратить в лёд, нужно отвести от неё количество теплоты:

$$Q_{\text{полн}} = c_{\text{в}} m(T_{\text{комн}} - T_{\text{л}}) + \lambda m \tag{24}$$

Так как КПД процесса оказывается постоянным, работу, которую необходимо затратить Феде для заморозки воды, можно рассчитать по формуле:

$$A_{\text{полн}} = \frac{Q_{\text{полн}}}{\eta} = \frac{c_{\text{в}} m(T_{\text{комн}} - T_{\text{л}}) + \lambda m}{\eta} \tag{25}$$

$$A_{\text{полн}} = \frac{4200\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 0{,}2\ \text{кг} \cdot (393\ \text{К} - 373\ \text{К}) + 3{,}3 \cdot 10^5\ \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 0{,}2\ \text{кг}}{6{,}94} = 11{,}9\ \text{кДж}$$