11 класс.

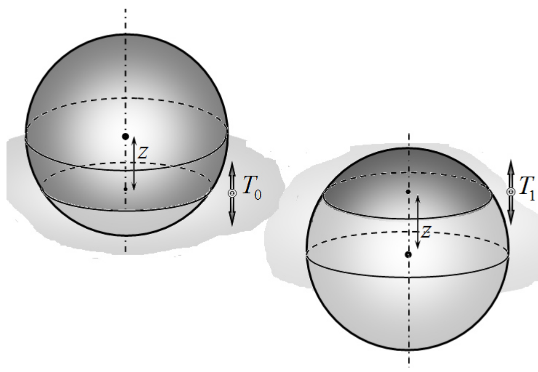
Задание 1. Колеблющиеся поплавки.

Часть 1. Сферический поплавок.

1.1 При малом отклонении от положения равновесия уравнения движения центра шара имеет вид

$$ma = -\Delta F_A \ . \qquad (1)$$

где $m = \frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\rho$ - масса шара (равная силе Архимеда в положении равновесия), $\Delta F_A = \pi r^2 x\rho g$ - изменение силы Архимеда при отклонении от положения равновесия на малую величину x, $r^2 = R^2 - z^2$ - квадрат радиуса сечения шара на уровне воды в положении равновесия. Подстановка этих выражений в уравнение приводит к уравнению



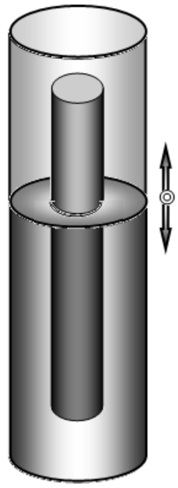
$$\frac{1}{3}\pi R^3\rho a = -\pi\left(R^2 - z^2\right)x\rho g \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{3\left(R^2 - z^2\right)g}{R^3}x \ , \qquad (2)$$

Которое является уравнением гармонических колебаний с периодом

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{3\left(R^2 - z^2\right)g}} \qquad (3)$$

1.2 При изменении массы шара в 3 раза в уравнении (1) ничего кроме массы не изменилось, поэтому период колебаний возрастет в $\sqrt{3}$ раз.

Часть 2. Цилиндрический поплавок.



2.1 Для устойчивого плавания центр масс должен находится ниже центра плавучести (то есть центра масс вытесненной жидкости), то есть ниже половины погруженной части. Иными словами, расстояние от нижнего основания цилиндра до центра масс должно быть меньше чем

$$z < \frac{1}{3}L. \qquad (1)$$

2.2 Уравнение движения поплавка при малом отклонении от положения равновесия имеет вид

$$ma = -\Delta F_A \ . \qquad (2)$$

Здесь $m = \frac{2}{3}SL\rho$, $\Delta F_A = S\rho gx$. Подставляя в уравнение (2), получим.

$$\frac{2}{3}SL\rho a = -S\rho gx \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{3}{2}\frac{g}{L}x.$$

Следовательно, период малых колебаний поплавка равен

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}} \qquad (3)$$

2.3 В этом случае необходимо учесть движение воды и изменение ее потенциальной энергии при движении стержня. Поэтому для решения задачи лучше воспользоваться уравнением закона сохранения энергии. Не сложно заметить, что площадь поперечного сечения воды между цилиндрическим поплавком и стенками сосуда в 3 раза больше поперечного сечения поплавка $S = 3S_0$. Поэтому если поплавок опускается вниз со скоростью v_0, то вода в объеме $3S_0 \cdot \frac{2}{3}L = 2S_0L$ поднимается вверх со скоростью $\frac{v_0}{3}$. Следовательно, в этом случае кинетическая энергия системы оказывается равной:

$$E = \frac{m_{поплавка}v_0^2}{2} + \frac{m_{воды}}{2}\left(\frac{v_0}{3}\right)^2 = \rho\frac{v_0^2}{2}\left(\frac{2}{3}LS_0 + \frac{2}{9}LS_0\right) = \frac{4}{9}LS_0\rho v_0^2. \tag{4}$$

При опускании цилиндра его потенциальная энергия уменьшается на величину

$$\Delta U = -mgx = -\frac{2}{3}LS_0\rho gx \tag{5}$$

При этом слой воды, находившийся под цилиндром (толщиной x), должен подняться на высоту цилиндра и растечься по свободной поверхности, занимая слой толщиной $\frac{x}{3}$. Поэтому изменение потенциальной энергии этой воды равно

$$\Delta U = \rho S_0 gx\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{3}L + \frac{x}{6}\right). \tag{6}$$

Таким образом, суммарное изменение потенциальной энергии системы равно

$$\Delta U = \frac{2}{3}\rho S_0 gx^2. \tag{7}$$

С учетом проведенных расчетов, уравнение закона сохранения энергии приобретает вид

$$\frac{4}{9}LS_0\rho v_0^2 + \frac{2}{3}\rho S_0 gx^2 = const \tag{8}$$

Из которого следует, что период колебаний поплавка в сосуде становится равным

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{3L}{2g}} \tag{9}$$

То есть возрастает в полтора раза.