Задание 3. Автомобиль и топливо

Автомобиль и топливо. Решение

1. Простая поездка

1.1. Пусть расход топлива равен χ. За некоторый промежуток времени Δt автомобиль проедет расстояние $l = v\Delta t$ и израсходует объём $V = \chi l = \chi v\Delta t$ топлива. При сгорании этого топлива выделится энергия $Q = qm = q\rho V = q\rho\chi v\Delta t$. Часть η данной энергии пойдёт на обеспечение электроники автомобиля и преодоление силы сопротивления воздуха, работа которой за указанный промежуток времени равна $kv \cdot l = kv^2\Delta t$. В итоге получаем:

$$\eta q\rho\chi v\Delta t = P_1\Delta t + kv^2\Delta t \tag{1}$$

Откуда выражаем расход топлива:

$$\chi = \frac{1}{\eta q\rho}\left(\frac{P_1}{v} + kv\right) \tag{2}$$

$$\chi = \frac{1}{0{,}15 \cdot 44 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 710\ {}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}}\left(\frac{1000\ \text{Вт}}{\frac{80\ \text{м}}{3{,}6\ \text{с}}} + 15\frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}}\cdot\frac{80\ \text{м}}{3{,}6\ \text{с}}\right) = 8{,}07\cdot 10^{-8}\ \frac{\text{м}^3}{\text{м}} = 8{,}07\ \frac{\text{л}}{100\ \text{км}} \tag{3}$$

1.2. Выражение (2) можно преобразовать к виду «$x + \frac{1}{x}$»:

$$\chi = \frac{1}{\eta q\rho}\left(\frac{P_1}{v} + kv\right) = \frac{\sqrt{P_1 k}}{\eta q\rho}\left(\frac{\sqrt{P_1}}{v\sqrt{k}} + \frac{v\sqrt{k}}{\sqrt{P_1}}\right) \geq \frac{2\sqrt{P_1 k}}{\eta q\rho} \tag{4}$$

То есть минимальный расход топлива равен:

$$\chi_{min} = \frac{2\sqrt{P_1 k}}{\eta q\rho} = \frac{2\sqrt{1000\ \text{Вт}\cdot 15\ \frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}}}}{0{,}15\cdot 44\cdot 10^6\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}\cdot 710\ {}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}} = 5{,}23\ \frac{\text{л}}{100\ \text{км}} \tag{5}$$

Реализуется минимальное значение расхода при условии $\frac{\sqrt{P_1}}{v_0\sqrt{k}} = 1$ (согласно примечанию про выражение вида $x + \frac{1}{x}$ в условии задачи), то есть:

$$v_0 = \sqrt{\frac{P_1}{k}} = \sqrt{\frac{1000\ \text{Вт}}{15\ \frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}}}} = 8{,}16\ {}^{\text{м}}/_{\text{с}} = 29.4\ {}^{\text{км}}/_{\text{ч}} \tag{6}$$

2. Подъём в гору

2.1. В случае подъёма в выражении (1) в правой части необходимо добавить работу на преодоление силы тяжести – mgh. Так как высота подъёма h рассчитывается как $h = l\sin\alpha = v\Delta t\sin\alpha$, получим уравнение:

$$\eta q\rho\chi v\Delta t = P_1\Delta t + kv^2\Delta t + mg\sin\alpha\ v\Delta t \tag{7}$$

Откуда следует выражение для расхода топлива:

$$\chi = \frac{1}{\eta q\rho}\left(\frac{P_1}{v} + kv + mg\sin\alpha\right) \tag{8}$$

$$\chi = \frac{1}{0{,}15\cdot 44\cdot 10^6\frac{\text{Дж}}{\text{кг}}\cdot 710\ {}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}}\left(\frac{1000\ \text{Вт}}{\frac{80\ \text{м}}{3{,}6\ \text{с}}} + 15\frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}}\cdot\frac{80\ \text{м}}{3{,}6\ \text{с}} + 1500\ \text{кг}\cdot 9{,}8\frac{\text{м}}{\text{с}^2}\cdot\sin 3°\right)$$

$$\chi = 24{,}5\ \frac{\text{л}}{100\ \text{км}}$$

2.2. В выражении (8) зависимость от скорости имеет вид $\frac{P_1}{v} + kv$, идентичный рассмотренному в пером пункте задачи. Тогда минимальный расход топлива будет реализован при той же скорости равномерного движения $v_0 = \sqrt{\frac{P_1}{k}} = 29.4\ {}^{\text{км}}/_{\text{ч}}$. Сам минимальный расход при этом равен:

$$\chi_{min} = \frac{2\sqrt{P_1 k} + mg\sin\alpha}{\eta q \rho} = \frac{2\sqrt{1000\ \text{Вт} \cdot 15\,\frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}}} + 1500\ \text{кг} \cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \sin 3^\circ}{0{,}15 \cdot 44 \cdot 10^6\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 710\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}} = 21{,}6\,\frac{\text{л}}{100\ \text{км}} \qquad (9)$$

3. Спуск с горы

3.1. Теперь сила тяжести совершает работу над автомобилем – данное поступление энергии надо записать в левую сторону выражения (1):

$$\eta q \rho \chi v \Delta t + mg\sin\alpha\ v\Delta t = P_1 \Delta t + k v^2 \Delta t \qquad (10)$$

Отсюда расход топлива определяется выражением:

$$\chi = \frac{1}{\eta q \rho}\left(\frac{P_1}{v} + kv - mg\sin\alpha\right) \qquad (11)$$

$$\chi = \frac{1}{0{,}15 \cdot 44 \cdot 10^6\,\frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \cdot 710\,{}^{\text{кг}}/_{\text{м}^3}}\left(\frac{1000\ \text{Вт}}{\frac{80}{3{,}6}\frac{\text{м}}{\text{с}}} + 15\,\frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}} \cdot \frac{80}{3{,}6}\frac{\text{м}}{\text{с}} - 1500\ \text{кг} \cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \sin 1^\circ\right)$$

$$\chi = 2{,}60\,\frac{\text{л}}{100\ \text{км}}$$

3.2. Приравнивая выражение (11) к нулю, можно получить квадратное уравнение:

$$k v_0^2 - mg\sin\alpha\, v_0 + P_1 = 0 \qquad (12)$$

Его дискриминант равен:

$$D = m^2 g^2 \sin^2\alpha - 4P_1 k \qquad (13)$$

А решение имеет вид:

$$v_0 = \frac{1}{2k}\left[mg\sin\alpha \pm \sqrt{D}\right] \qquad (14)$$

Подставляя числовые значения, получим два искомых значения скорости:

$$v_{01} = 11{,}1\ \frac{\text{м}}{\text{с}} = 39{,}9\,\frac{\text{км}}{\text{ч}},\ v_{02} = 6{,}01\,\frac{\text{м}}{\text{с}} = 21{,}6\,\frac{\text{км}}{\text{ч}} \qquad (15)$$

3.3. При движении автомобиля с ускорением необходимо в выражении (10) дополнительно учитывать расходы энергии по увеличению скорости автомобиля. Из второго закона Ньютона известно, для того, чтобы тело двигалось с ускорением *a*, к нему должна быть приложена равнодействующая сила, по модулю равная *ma*, которая и будет совершать работу по разгону. Воспользуемся этим знанием в нашей задаче: расходы энергии на ускорение автомобиля считаем как работу некоторой силы, равной *ma* при перемещении на расстояние $v\Delta t$. Тогда, в отсутствие расхода топлива, уравнение (10) примет вид:

$$mg\sin\alpha\ v\Delta t = P_1\Delta t + kv^2\Delta t + mav\Delta t \qquad (16)$$

Отсюда получаем искомую зависимость ускорения от скорости:

$$a = g\sin\alpha - \frac{1}{m}\left(kv + \frac{P_1}{v}\right) \qquad (17)$$

Рассмотрим знак ускорения вблизи найденных значений v_0. Во-первых, можно убедиться, что при скорости v_{01} или v_{02} ускорение действительно равно нулю. Во-вторых, отметим, что в сумме $kv + \frac{P_1}{v}$ при скорости v_{01} основную роль играет первое слагаемое, а при скорости v_{02} – второе. В этом можно убедиться, к примеру, подставив численные значения.

Пусть автомобиль двигался со скоростью v_{01} и эта скорость немного увеличилась. Определим знак ускорения. В скобке в (17) основную роль играет слагаемое kv – оно увеличится, а само ускорение уменьшится. Учитывая, что при v_{01} оно было равно нулю, получаем $a < 0$ при $v > v_{01}$. Аналогичными рассуждениями можно прийти к результату $a > 0$ при $v < v_{01}$. Такие соотношения говорят об устойчивости значения скорости v_{01}: при небольшом отклонении ускорение возвращает величину скорости обратно к v_{01}. Качественное объяснение полученных знаков ускорения следующее. v_{01} – большее из двух найденных значений v_0. При больших скоростях основную роль в сопротивлении движению оказывает сила сопротивления воздуха. С увеличением скорости эта сила также увеличится, что создаст тормозящее, то есть отрицательное, ускорение и наоборот.

Если рассмотреть движение автомобиля при скорости, близкой к v_{02}, то основную роль будет играть слагаемое $\frac{P_1}{v}$, имеющее смысл торможения двигателем. Как видно, его влияние уменьшается с увеличением скорости, что приведёт к следующей расстановке знаков ускорения: $a > 0$ при $v > v_{02}$ и $a < 0$ при $v < v_{02}$. Такая расстановка знаков говорит о неустойчивости значения скорости v_{02}. Действительно, при малом, например, возрастании скорости возникшее ускорение будет еще больше её увеличивать, удаляя всё дальше от величины v_{02}.

Знаки ускорения оказались такими, что со временем значения скоростей будут расходиться от v_{02} и сходиться к v_{01}. Таким образом, через достаточно большой промежуток времени спуска автомобиля с горки не расходуя топливо, автомобиль будет двигаться со скоростью $v_{01} = 39{,}9\,\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

3.4. Постоянную скорость спуска с горы, не расходуя топливо, мы сможем определить из выражения (14) в том случае, если дискриминант (13) квадратного уравнения неотрицательный:

$D = m^2 g^2 \sin^2 \alpha - 4P_1 k \geq 0$

Отсюда получаем условие для угла уклона:

$$\sin\alpha \geq \frac{2\sqrt{P_1 k}}{mg} \tag{18}$$

$$\alpha \geq \arcsin\frac{2\sqrt{1000\ \text{Вт}\cdot 15\,\frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}}}}{1500\ \text{кг}\cdot 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}}$$

$$\alpha \geq 0{,}95^\circ$$

4. Разгон

Для вычислений будет удобно заранее посчитать величину постоянного ускорения автомобиля.

$$a = \frac{v_1}{\Delta t} = \frac{\left({}^{90}/_{3,6}\right)\frac{\text{м}}{\text{с}}}{2\cdot 60\ \text{с}} = 0{,}208\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \tag{19}$$

4.1. Количество энергии, необходимое на разгон автомобиля мы уже считали в п.3.3. Запишем (1), добавляя слагаемое, связанное с разгоном.

$$\eta q \rho \chi v \Delta t = P_1 \Delta t + k v^2 \Delta t + m a v \Delta t \tag{20}$$

Вспоминая, что для равноускоренного движения без начальной скорости справедливо $v = at$, получим искомое выражение для зависимости расхода топлива от времени.

$$\chi(t) = \frac{1}{\eta q \rho}\left(\frac{P_1}{at} + kat + ma\right) \tag{21}$$

4.2. Пройдя некоторое малое расстояние Δl, автомобиль расходует объём топлива равный $\Delta V = \chi \Delta l$. Если это расстояние пройдено за промежуток времени Δt, то временно́й расход топлива равен:

$$\psi = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \chi\frac{\Delta l}{\Delta t} = \chi v \tag{22}$$

Выражение (22) показывает связь между введенными временны́м и обычным расходами топлива в любой момент времени. Подставляя (21) в (22) и используя $v = at$ для равноускоренного движения, получим требуемую зависимость.

$$\psi(t) = \frac{1}{\eta q \rho}\left(P_1 + k a^2 t^2 + m a^2 t\right) \tag{23}$$

4.3. Средний временнóй расход будем рассчитывать по формуле

$$\langle\psi\rangle = {}^{V}/_{\Delta t} \tag{24}$$

где V – объём топлива, израсходованного автомобилем за все $\Delta t = 120$ с пути. Для нахождения этой величины удобным оказывается построить график зависимости $\psi(t)$ (рис. 1). Действительно на каждом малом участке пути объём потраченного топлива равен произведению величин ψ и Δt, из чего следует, что полный объём топлива V будет равен площади под указанным графиком.

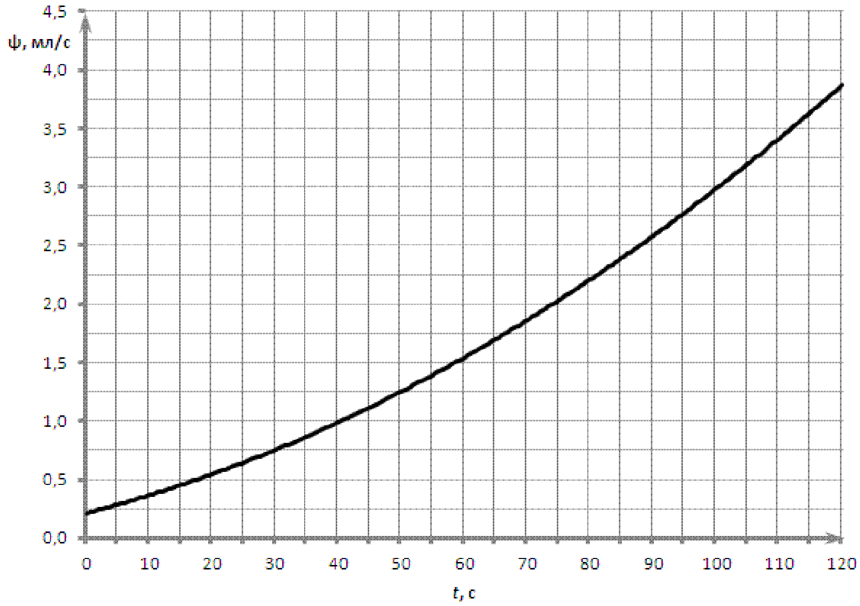

Рисунок 3 - График зависимости временного расхода от времени

На рис. 1 под графиком оказалось приблизительно 154 клетки. Площадь одной клетки, исходя из цен деления осей, равна: $0{,}25\frac{\text{мл}}{\text{с}} \times 5\text{с} = 1{,}25\text{мл}$. Тогда полный объём израсходованного автомобилем топлива равен: $V = 1{,}25\ \text{мл} \cdot 154 = 192{,}5\ \text{мл}$.

Таким образом, средний временнóй расход топлива равен:

$$\langle\psi\rangle = {}^{V}/_{\Delta t} = \frac{192{,}5\ \text{мл}}{120\ \text{с}} = 1{,}60\frac{\text{мл}}{\text{с}}$$

4.4. Зная полный объём потраченного топлива, можно определить и средний путевой его расход. Вспоминая, что для равноускоренного движения пройденный путь $l = \frac{at^2}{2}$, получаем:

$$\langle\chi\rangle = \frac{V}{l} = \frac{2V}{at^2} = \frac{2 \cdot 192{,}5\ \text{мл}}{0{,}208\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot (120\ \text{с})^2} = 0{,}129\frac{\text{мл}}{\text{м}} = 12{,}9\frac{\text{л}}{100\ \text{км}}$$

5. Постоянный расход

5.1. Исходя из графика, представленного в условии задачи, мы можем получить информацию о горизонтальной координате, высоте, и угле наклона дороги в любой точке. На основании того, что горизонтальные координаты на дороге на два порядка превышают вертикальные, отсчитываемые от места начала движения, будем считать, что пройденный автомобилем путь мало отличается от его координаты x (то есть высота подъема пренебрежимо мала по сравнению с горизонтальным перемещением). Так как по условию ускорением можно пренебречь, то справедливо выражение (8) для расхода топлива при подъёме на склон. Его можно переписать в виде квадратного уравнения для скорости:

$$kv^2 + (mg\sin\alpha - \eta q\rho\chi)v + P_1 = 0 \tag{25}$$

Подставив значение $\sin\alpha$, из уравнения (25) сможем определить скорость движения при заданном расходе топлива. Возьмём некоторое количество точек на графике в условии и проведём для них соответствующие вычисления. Результаты будем записывать в таблицу. Для определения угла α по графику удобной процедурой является измерение tg α, построив касательную к профилю. К нашему удобству, для малого уклона tg $\alpha \approx$ sin α. У квадратного уравнения, вообще говоря, два различных корня. Однако один из них будет соответствовать медленному движению, не подходящему под условие данного пункта.

Для того чтобы найти время движения автомобиля, построим график зависимости величины, обратной скорости ($1/v$) от пройденного пути. Действительно, их произведение на каждом малом промежутке дает соответствующий интервал времени, а вся площадь под графиком будет определять полное время движения автомобиля.

Таблица 1

№	l, км	h, м	sin α	v_1, м/с	v_2, м/с	$1/v_2$, с/км
1	0	0	0,014	6,85	9,73	102,734
2	1	12	0,01	4,05	16,45	60,790
3	2	22	0,0082	3,56	18,70	53,470
4	3	30	0,0063	3,17	21,00	47,611
5	4	35	0,004	2,83	23,55	42,459
6	6	39	0,0007	2,46	27,15	36,830
7	8	40	0	2,39	27,91	35,824
8	10	41	0,0005	2,44	27,38	36,526
9	12	45	0,0039	2,82	23,66	42,259
10	13	50	0,0062	3,17	21,06	47,480
11	14	56	0,0083	3,59	18,58	53,819
12	15	66	0,0118	4,77	13,96	71,608

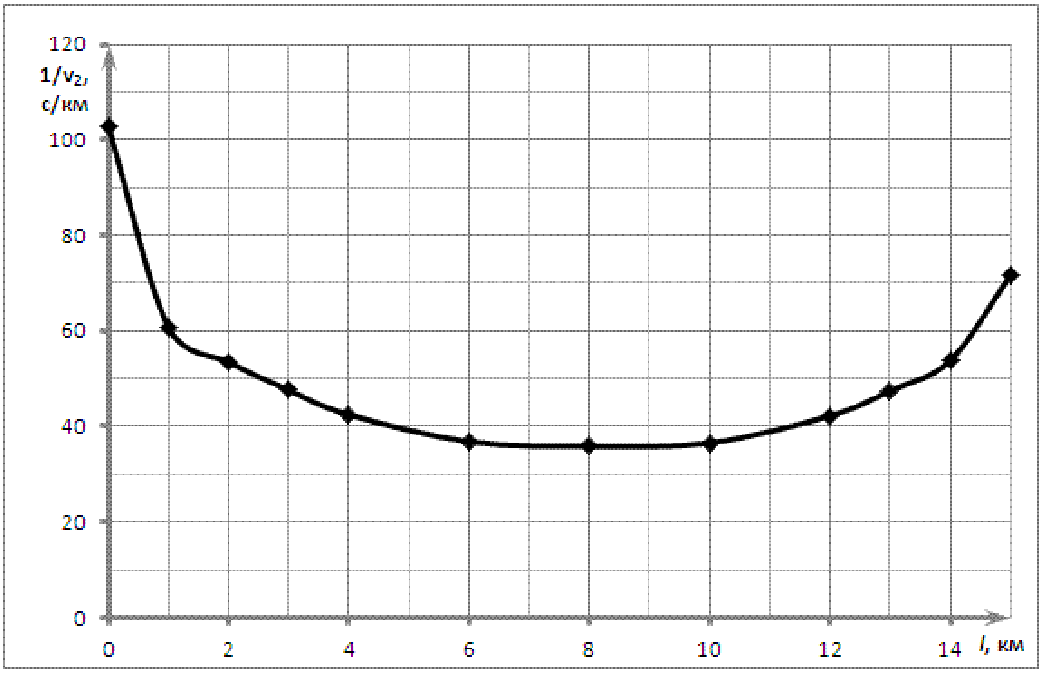

Рисунок 4 - График зависимости обратной скорости от пройденного пути

Под графиком на рис. 2 оказалось примерно 67 клеток. Площадь каждой определяется ценой деления и равна: $1\text{ км} \times 10\ \frac{\text{с}}{\text{км}} = 10\text{ с}$. Получаем, что общее время движения автомобиля из пункта А в пункт В оцениваем как:

$$T = 67\text{клеток} \times 10\text{ с} = 670\text{ с} = 11{,}2\text{ минуты}$$

6. Интересно знать

6.1. Согласно введенному определению, расход топлива – это объем делённый на единицу пути: $\chi = \frac{V}{L}$. По размерности эта величина соответствует некоторой площади. Действительно, если мы объём делим на некоторую длину объекта, то получаем среднюю площадь поперечного сечения. В качестве длины объекта *L* в нашей формуле выступает пройденный путь. Получаем, если мы весь объем расходуемого топлива растянем тонкой струёй вдоль пройденного пути (вдоль траектории), то величина расхода χ будет равна малой площади поперечного сечения этой струи.