Задача 10-3 Установление равновесия.

Часть 1. Лодка.

1.1 Уравнение движения лодки, следующее из 2 закона Ньютона имеет вид

$$ma = -\beta v, \tag{1}$$

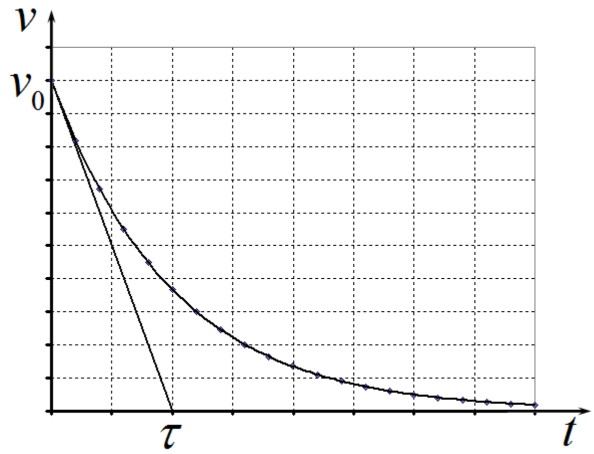
Которое очевидным образом приводится к виду уравнения (M1) из «математического введения»:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{\beta}{m} v. \tag{2}$$

Из этого уравнения следует, что зависимость скорости от времени имеет вид монотонно убывающий функции (экспоненты) с характерным временем торможения

$$\tau = \frac{m}{\beta}. \tag{3}$$

График этой функции и метод нахождения характерного времени торможении показан на рисунке.



Для определения пути, пройденного лодкой, преобразуем уравнение (2):

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{\beta}{m}\frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = -\frac{m}{\beta}\Delta v. \tag{4}$$

Так как скорость меняет от начального значения до нуля, то $\Delta v = -v_0$, то полный путь пройденный лодкой оказывается равным

$$L = \frac{m}{\beta} v_0 \tag{5}$$

Заметим, что формально этот конечный путь лодка пройдет за бесконечно большое время.

1.2 В этом случае лодка будет разгоняться с уменьшающимся ускорением. Уравнение движение имеет вид

$$ma = F_0 - \beta v. \tag{6}$$

Ускорение станет равным нулю, когда скорость лодки достигнет скорости установившегося движения, которую можно найти из уравнения (6), полагая $a = 0$:

$$\bar{v} = \frac{F_0}{\beta}. \tag{7}$$

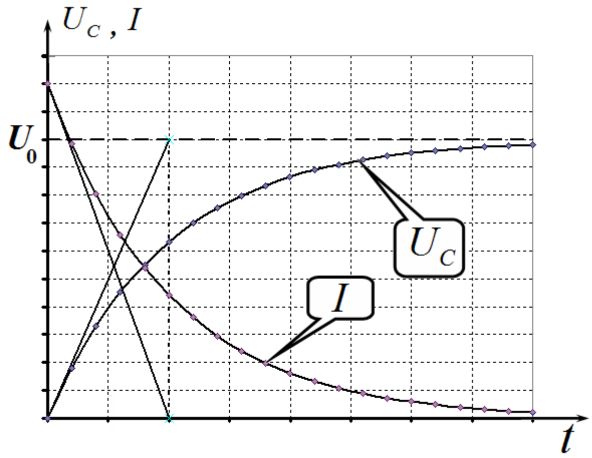
Перепишем уравнение (6) в виде

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{\beta}{m}\left(v - \frac{F_0}{\beta}\right). \tag{6}$$

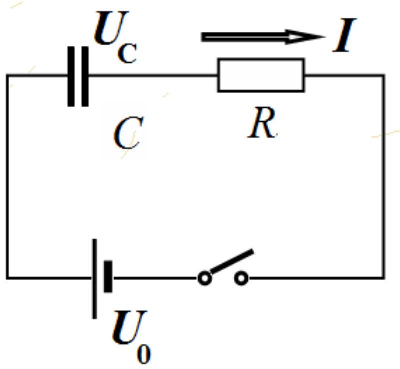
Если ввести новую переменную $X = v - \bar{v}$, имеющую смысл отклонения модуля скорости от скорости установившегося движения, то уравнение (7) преобразуется к известному виду

$$\frac{\Delta X}{\Delta t} = -\frac{\beta}{m} X. \tag{7}$$

Решение этого уравнения имеет вид монотонно возрастающей функции, стремящейся к предельному значению (установившейся скорости) с характерным временем разгона, определяемым формулой (3). График этой функции показан на рисунке.



Часть 2 Конденсатор.



2.1 На основании закона для силы тока через резистор можно записать уравнение

$$U_0 - U_C = IR \qquad (8)$$

Сила тока в цепи равна скорости изменения заряда на конденсаторе, поэтому ее можно выразить через напряжение на конденсаторе

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = C\frac{\Delta U_C}{\Delta t} \qquad (9)$$

С учетом этого соотношения уравнение (8) преобразуется к знакомому виду:

$$RC\frac{\Delta U_C}{\Delta t} = U_0 - U_C \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta U_C}{\Delta t} = -\frac{1}{RC}\left(U_C - U_0\right) \qquad (10)$$

Это уравнение, с точностью до обозначений совпадает с уравнением разгона лодки (6), поэтому оно будет иметь такое же решение. Из анализа этого уравнения следует, что характерное время зарядки конденсатора в данной цепи определяется формулой

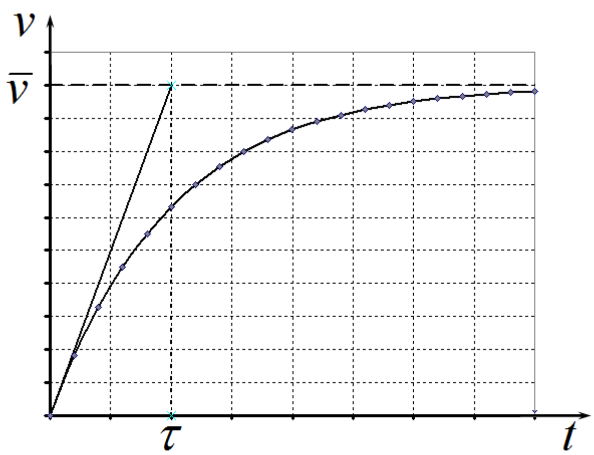
$$\tau = RC\,. \qquad (11)$$

Для определения зависимости силы тока от времени выразим, скорость ее изменения из уравнения (8). После очевидных подстановок получим уравнение

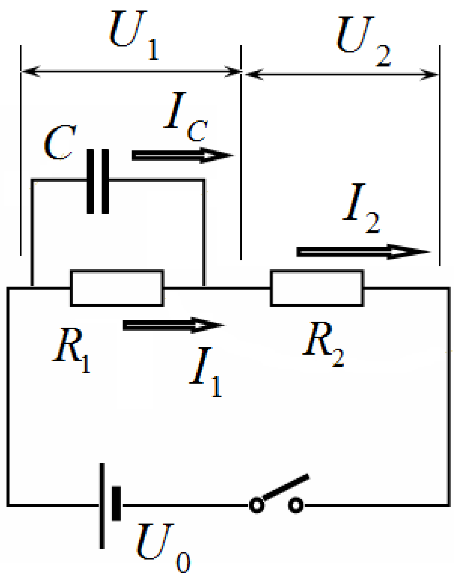
$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{1}{R}\frac{\Delta\left(U_0 - U_C\right)}{\Delta t} = -\frac{1}{R}\frac{\Delta U_C}{\Delta t} = = -\frac{1}{RC}\frac{\Delta q}{\Delta t} = -\frac{1}{RC}I\,, \qquad (12)$$

Которое совпадает с уравнением торможения лодки, с характерным временем также описываем формулой (11).

Графики зависимостей силы тока и напряжения на конденсаторе от времени показаны на рисунке.



2.2 Для описания протекания токов в цепи получим уравнения для напряжения на конденсаторе U_1 (равное напряжению на резисторе R_1). Для этого запишем выражения для силы тока на резисторе R_2:



$$I_2 = \frac{U_0 - U_1}{R_2}. \qquad (13)$$

С другой стороны эта сила тока равна сумме сил токов через резистор R_1 и через конденсатор

$$I_2 = I_1 + I_C, \qquad (14)$$

которые в свою очередь могут выражены через напряжение U_1:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1}, \quad I_C = \frac{\Delta q}{\Delta t} = C\frac{\Delta U_1}{\Delta t}. \qquad (15)$$

Из этих выражений следует уравнение, описывающее изменение напряжения на конденсаторе

$$\frac{U_0 - U_1}{R_2} = \frac{U_1}{R_1} + C\frac{\Delta U_1}{\Delta t}. \qquad (16)$$

В очередной раз мы получили уравнение, в котором скорость изменения некоторой величины (в данном случае U_1) линейно зависит от этой величины. Приведем его к стандартному виду:

$$\begin{gathered} \frac{\Delta U_1}{\Delta t} = -U_1\frac{1}{C}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) + \frac{U_0}{R_2 C} \\ \frac{\Delta U_1}{\Delta t} = -\frac{1}{\tau}\left(U_1 - \overline{U}_1\right) \end{gathered}. \qquad (17)$$

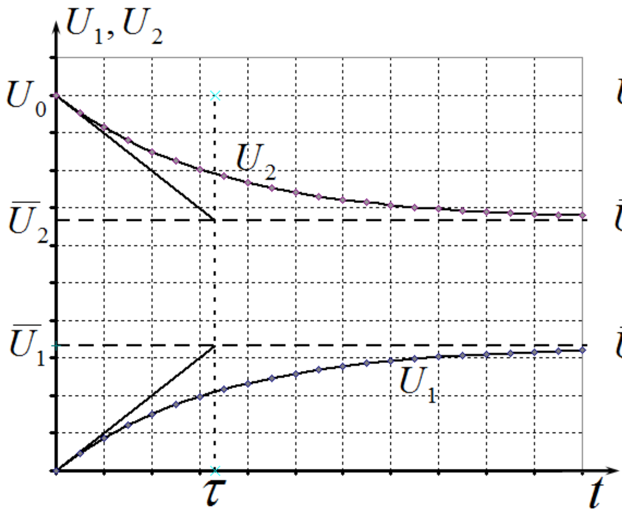
где обозначено $\tau = C\dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ - характерное время установления тока в цепи, или время зарядки конденсатора. $\overline{U}_1 = U_0\dfrac{R_1}{R_1 + R_2}$ - стационарное значение напряжения U_1. В начальный момент конденсатор не заряжен, поэтому напряжение на нем равно нулю; ток протекающий через резистор R_2 начинает заряжать конденсатор. После того, как конденсатор зарядится до предельного значения (когда выровняются силы токов через резисторы), напряжение на конденсаторе перестанет изменяться. Интересно отметить, что время зарядки также может быть записано, как RC, но только в качестве R следует брать сопротивление двух резисторов, соединенных параллельно!

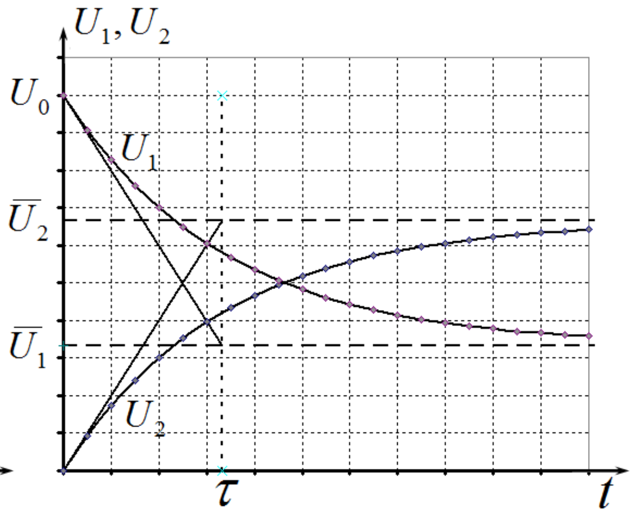
Напряжение на резисторе R_2 может быть рассчитано по простой формуле

$$U_2 = U_0 - U_1 \qquad (18)$$

Графики зависимостей напряжений от времени приведены на рисунке. Показано два случая: а) $R_2 = 2R_1$, б) $R_1 = 2R_2$.

2.3 При отключении источника конденсатор будет разряжаться только через резистор R_1. Поэтому характерное время разрядки будет равно $\tau_2 = R_1 C$.





Задача 11-1

1. Край соленоида

1.1 Для бесконечного соленоиду

$$B_\infty = \frac{\mu_0 IN}{2L}\left(\cos 0^0 + \cos 0^0\right) = \frac{\mu_0 IN}{L}$$

1.2 Для индукции в произвольной точке внутри соленоида

$$B_x = \frac{\mu_0 IN}{2L}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}} + \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2+r^2}}\right)$$

На рисунке показан график этой функции (от учеников его построение не требуется). Видно, что при увеличении отношения длины к радиусу соленоида влияние его краев на поле уменьшается. Можно сказать, что краевые эффекты распространяются на глубину порядка диаметра соленоида.

Индукция магнитного поля на краю соленоида равна: