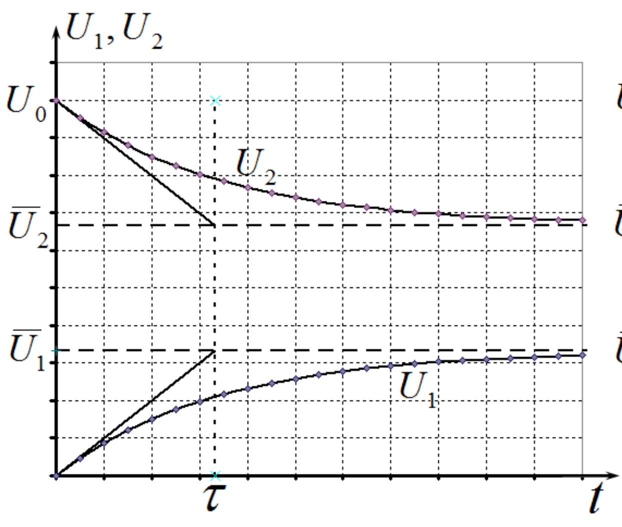
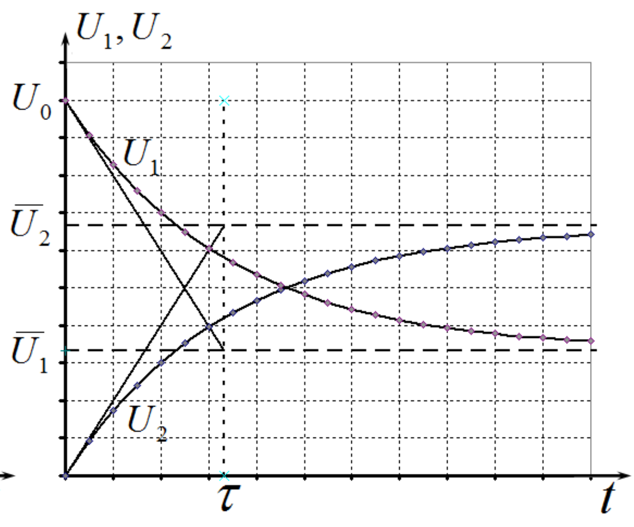




Задача 11-1

1. Край соленоида

1.1 Для бесконечного соленоиду

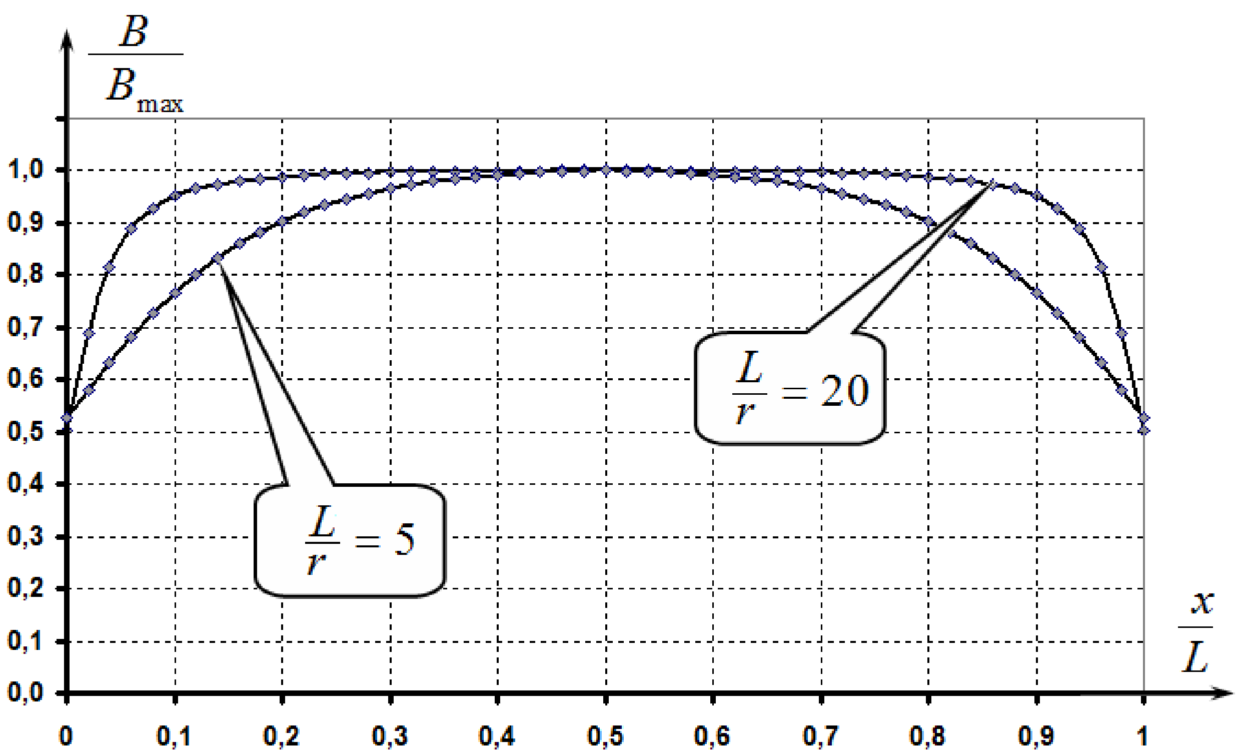
$$B_\infty = \frac{\mu_0 IN}{2L}\left(\cos 0^0 + \cos 0^0\right) = \frac{\mu_0 IN}{L}$$

1.2 Для индукции в произвольной точке внутри соленоида

$$B_x = \frac{\mu_0 IN}{2L}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+r^2}} + \frac{L-x}{\sqrt{(L-x)^2+r^2}}\right)$$

На рисунке показан график этой функции (от учеников его построение не требуется). Видно, что при увеличении отношения длины к радиусу соленоида влияние его краев на поле уменьшается. Можно сказать, что краевые эффекты распространяются на глубину порядка диаметра соленоида.

Индукция магнитного поля на краю соленоида равна:



$$B_0 = B_L = \frac{\mu_0 IN}{2L} \cdot \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}} = \frac{\mu_0 IN}{2L\sqrt{1 + \frac{r^2}{L^2}}} \approx \frac{\mu_0 IN}{2L}\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{r^2}{L^2}\right) \approx \frac{\mu_0 IN}{2L} = \frac{1}{2} B_\infty$$

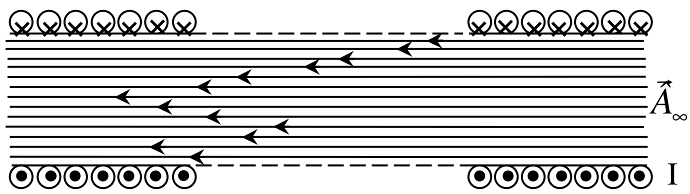
Индукция магнитного поля в центре соленоида ($\tilde{o} = L/2$) равна:

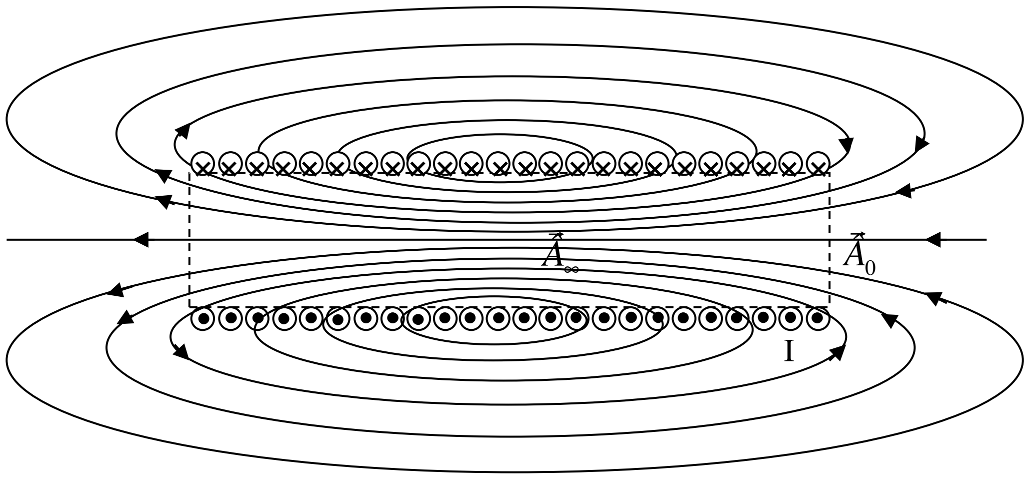
$$\hat{A}_{L/2} = \frac{\mu_0 IN}{2L} \cdot 2\frac{\frac{L}{2}}{\sqrt{\frac{L^2}{4} + r^2}} = \frac{\mu_0 IN}{L\sqrt{1 + \frac{4r^2}{L^2}}} \approx \frac{\mu_0 IN}{L}\left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4r^2}{L^2}\right) \approx \frac{\mu_0 IN}{L} = B_\infty$$

Индукция магнитного поля Bx вдоль оси соленоида конечной длины L>>r принимает максимальное значения в центре соленоида $\hat{A}_{L/2} = \frac{\mu_0 IN}{L} = B_\infty = B_{x(\max)}$ и минимальное значения на краях соленоида $B_0 = B_L = \frac{\mu_0 IN}{2L} = \frac{1}{2} B_\infty = B_{x(\min)}$

1.3 Если смотреть справа на соленоид, то направление тока совпадает с направлением вращения буравчика по часовой стрелке. Количество силовых линий магнитного поля К пропорционально модулю вектора магнитной индукции В ($K \square B$). В центре соленоида К1=13, на краю соленоида К2=7.

При конечной длине соленоида начинают сказываться краевые эффекты: поле внутри соленоида перестает быть однородным, меняется радиальная Br и осевая Bx составляющие магнитного поля.





2. Край стола

2.1 Из условия равновесия цепочки,

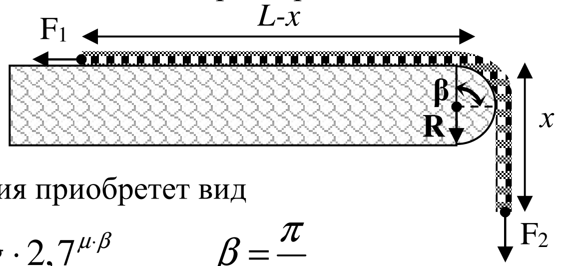
$$\frac{m}{L}x_1 g = \mu\frac{m}{L}\left(L - x_1\right)g$$

следует, что максимально возможная длина свисающей части цепочки равна

$$x_1 = \frac{L}{\frac{1}{\mu}+1} = \frac{L}{2,57} \approx 0,39L$$

2.2 Так как R<<L, то массой цепочки на изгибе стола можно пренебречь:

$$\Delta m = \frac{m}{L}R\frac{\pi}{2} \approx 0$$



Тогда условие равновесия с учетом силы трения приобретет вид

$$\frac{m}{L}x_2 g = \mu\frac{m}{L}\left(L - x_2\right)g \cdot 2,7^{\mu\cdot\beta}, \quad \text{где} \quad \beta = \frac{\pi}{2}$$

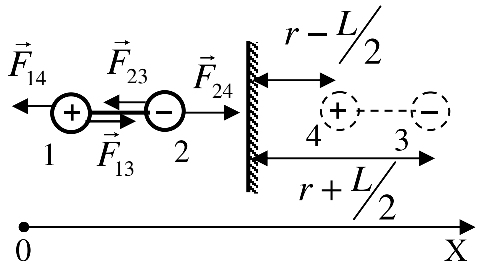
Подстановка численных значений дает результат

$$x_2 = \frac{L}{\frac{1}{\mu 2,7^{\mu\cdot\beta}}+1} = \frac{L}{\frac{\pi}{2\cdot 2,7}+1} = \frac{L}{1,582} \approx 0,63L$$

Учет действия края стола на цепочку увеличивает значение x более чем в полтора раза!

$$\frac{\tilde{o}_2}{\tilde{o}_1} \approx 1,63$$

3. «Край» электрического диполя



3.1 Для определения силы взаимодействия диполя с проводящей плоскостью воспользуемся методом электростатических изображений.

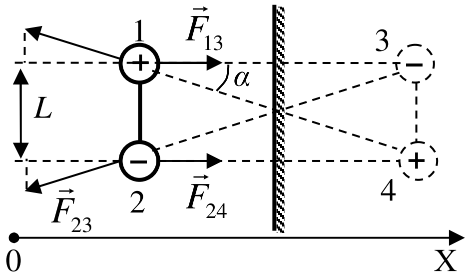
$$\vec{F}_{\perp} = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{23}$$

$$F_{\perp} = kq^2\left(-\frac{1}{4r^2} - \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{4\left(r+\frac{L}{2}\right)^2} + \frac{1}{4\left(r-\frac{L}{2}\right)^2}\right) = \frac{kq^2}{4}\left(-\frac{2}{r^2} + \frac{2r^2+\frac{L^2}{2}}{r^4\left(1-\frac{L^2}{4r^2}\right)^2}\right)$$

Учтем формулу приближения: $\left(1-\frac{L^2}{4r^2}\right)^{-2} \approx 1-(-2)\frac{L^2}{4r^2} = 1+\frac{L^2}{2r^2}$

$$F_{\perp}=\frac{kq^2}{4}\left(-\frac{2}{r^2}+\frac{\left(2r^2+\frac{L^2}{2}\right)\left(1+\frac{L^2}{2r^2}\right)}{r^4}\right)\approx\frac{3kq^2L^2}{8r^4}$$

Учтено, что $\frac{L^4}{2r^2}\approx 0$, т. к. L>>r. $\vec{F}_{14}$



3.2 Из симметрии задачи следует, что

$F_{14}=F_{23}=k\frac{q^2}{L^2+4r^2}$, $F_{13}=F_{24}=k\frac{q^2}{4r^2}$

Сила взаимодействия диполя с проводящей плоскостью при параллельной ориентацией равна:

$$F_{\parallel}=2F_{13}-2F_{14}\cos\alpha$$

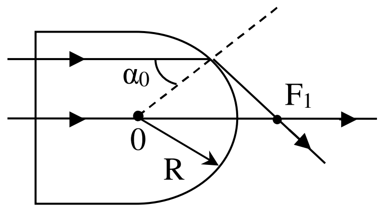
$$F_{\parallel}=2kq^2\left(\frac{1}{4r^2}-\frac{1}{L^2+4r^2}\cdot\frac{2r}{\sqrt{L^2+4r^2}}\right)=2kq^2\left(\frac{1}{4r^2}-\frac{2r}{8r^3\left(1+\frac{L^2}{4r^2}\right)^{3/2}}\right)$$

По формуле приближения $\left(1+\frac{L^2}{4r^2}\right)^{-3/2}\approx 1-\frac{3}{2}\cdot\frac{L^2}{4r^2}$

$$F_{\parallel}=2kq^2\left(\frac{1}{4r^2}-\frac{1}{4r^2}\left(1-\frac{3}{2}\frac{L^2}{4r^2}\right)\right)=\frac{3kq^2L^2}{4r^4}\qquad F_{\perp}=\frac{1}{2}F_{\parallel}$$

4. Край сферической линзы

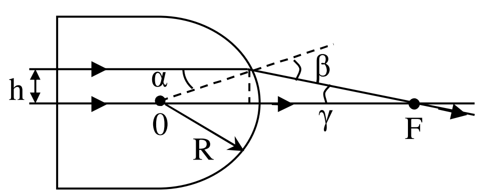
4.1 Расстояние крайнего фокуса от центра сферической поверхности OF1 для плосковыпуклой поверхности определим из условия полного внутреннего отражения.



$\sin\alpha_0=\frac{1}{n}$, $OF_1=\frac{R}{\cos\alpha_0}=\frac{R}{\sqrt{1-\frac{1}{n^2}}}=\frac{Rn}{\sqrt{n^2-1}}$

Расстояние параксиального фокуса от центра сферической поверхности OF для плосковыпуклой поверхности определим для очень узкого пучка лучей .

Для малых углов можно считать $\sin\theta\approx tg\theta\approx\theta$



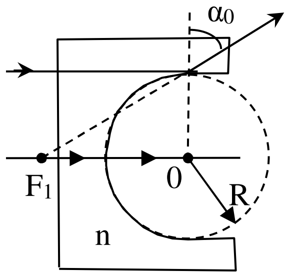
$n\alpha=\beta$ (1), $\frac{h}{R}=\alpha$ (2), $\frac{h}{OF-R}=\gamma$ (3), $\beta=\alpha+\gamma$ (4)

Решая систему уравнений (1) – (4), получаем:

$$OF=\frac{Rn}{n-1}$$

$$\Delta F = Rn\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\right)$$

4.2 Расстояние крайнего фокуса от центра сферической поверхности OF1 для плосковогнутой поверхности определим из условия полного внутреннего отражения.

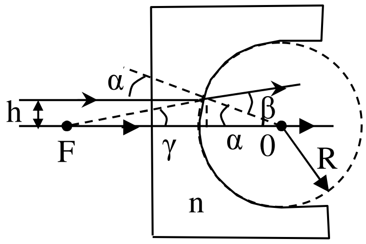


$$\sin\alpha_0 = \frac{1}{n}$$

$$OF_1 = \frac{R}{tg\alpha_0} = \frac{R}{\sqrt{n^2-1}}$$

Расстояние параксиального фокуса от центра сферической поверхности OF для плосковогнутой поверхности определим для очень узкого пучка лучей.

Для малых углов можно считать $\sin\theta \approx tg\theta \approx \theta$



$n\alpha = \beta$ (1), $\frac{h}{R} = \alpha$ (2), $\frac{h}{OF - R} = \gamma$ (3), $\beta = \alpha + \gamma$ (4)

Решая систему уравнений (1) – (4), получаем: $OF = \frac{Rn}{n-1}$

$$\Delta F' = R\left(\frac{n}{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\right)$$

4.3 Можно предложить несколько способов уменьшения сферической аберрации сферической поверхности линзы:

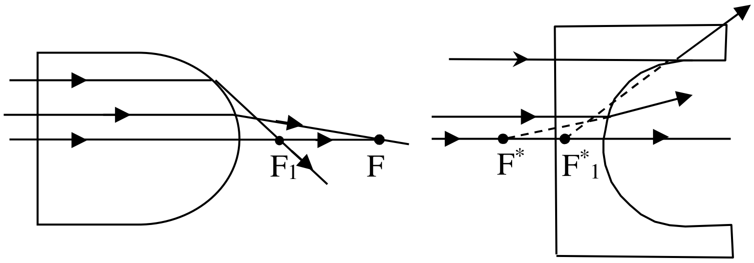
A) С увеличением показателя преломления материала линзы уменьшается ΔF.

$$\Delta F = Rn\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\right) \qquad \Delta F' = R\left(\frac{n}{n-1} - \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\right)$$

n	ΔF	ΔF*
1,5	2R	2,41R
2	0,85R	1,42R

B) Уменьшение ширины пучка света приближает значение краевого фокуса к параксиальному, что приводит к уменьшению значения ΔF. Ширину пучка света можно регулировать диафрагмой.

C) Можно заметить, что плосковыпуклая сферическая поверхность смещает краевой



фокус по ходу лучей, а плосковыпуклая поверхность смещает краевой фокус против хода лучей!