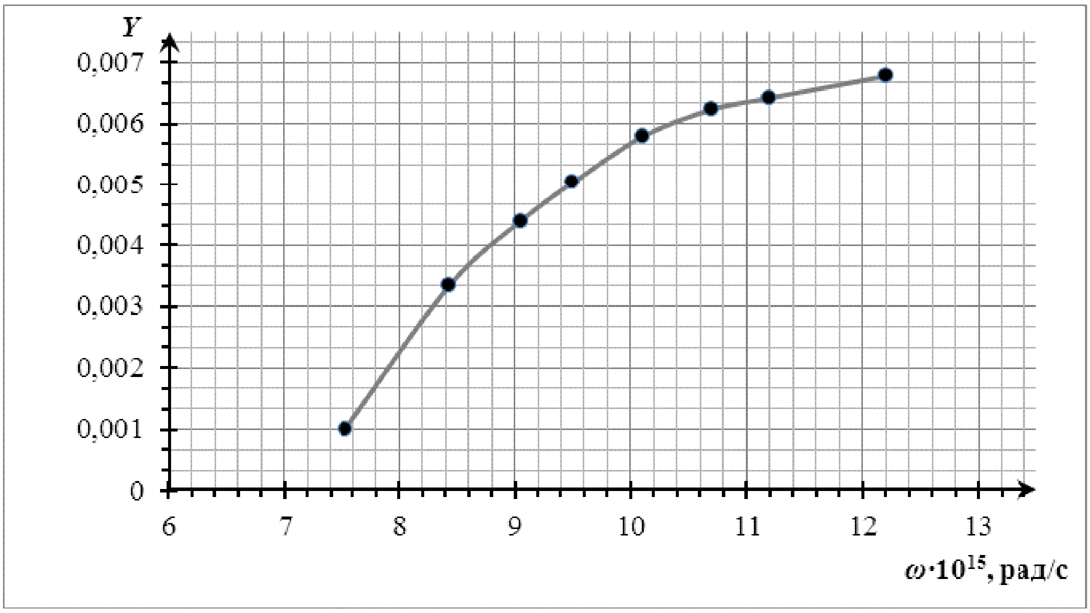


Рисунок 3 - График зависимости квантового выхода фотоэффекта от частоты

Видно, что квантовый выход увеличивается с увеличением частоты в заданном диапазоне, но темп этого роста уменьшается.

Задача 11-3

Часть 1. Переменная диэлектрическая проницаемость.

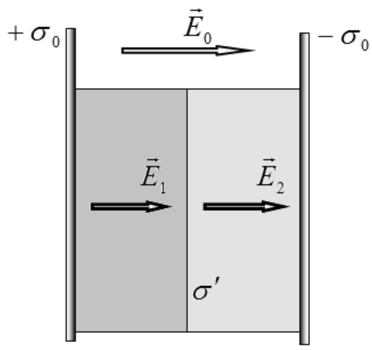
1.1.1 Описанную систему можно рассматривать как два конденсатора, соединенных последовательно. Используя формулу для электроемкости плоского конденсатора, запишем емкость составного конденсатора

$$\frac{1}{C}=\frac{h}{2\varepsilon_1\varepsilon_0 S}+\frac{h}{2\varepsilon_2\varepsilon_0 S}=\frac{h}{2\varepsilon_0 S}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \quad\Rightarrow\quad C=\frac{2\varepsilon_0 S}{h}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}. \qquad (1)$$

1.1.2 При помещении диэлектрика во внешнее поле на нем возникаю поляризационные заряды, которые изменяют поле внутри диэлектрика. Если силовые линии поля перпендикулярны границам диэлектрика, то напряженность поля внутри диэлектрика оказывается в ε раз меньше.

Обозначим напряженность поля, создаваемого только зарядами на пластинах $\vec{E}_0$, модуль которой связан с поверхностной плотностью зарядов на пластинах соотношением

$$\sigma_0=\varepsilon_0 E_0. \qquad (2)$$



Тогда напряженности полей внутри диэлектриков будут равны $\vec{E}_1=\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_1}, \vec{E}_2=\frac{\vec{E}_0}{\varepsilon_2}$. Разность потенциалов между пластинами (напряжение) может быть выражена через напряженности полей следующим образом

$$U_0=E_1\frac{h}{2}+E_2\frac{h}{2}=\frac{E_0}{\varepsilon_1}\frac{h}{2}+\frac{E_0}{\varepsilon_2}\frac{h}{2}=E_0\frac{h}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}. \qquad (3)$$

Откуда следует, что

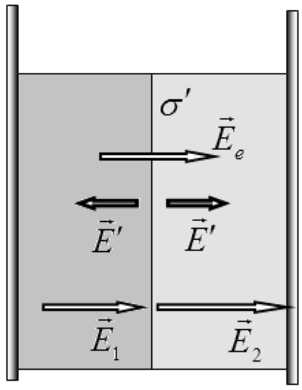
$$E_0 = U_0 \frac{2}{h} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \tag{4}$$

А поверхностная плотность зарядов на пластинах

$$\sigma_0 = \varepsilon_0 U_0 \frac{2}{h} \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \tag{5}$$

Впрочем, эта формула может быть получена непосредственно из формулы (1), как $q = CU_0$.

Поверхностная плотность поляризационных зарядов на границе диэлектриков σ' может быть найдена различными способами.



Способ 1. Представим поля внутри диэлектриков как суперпозицию поля $E' = \dfrac{\sigma'}{2\varepsilon_0}$, создаваемого зарядами σ' и поля $\vec{E}_e$, создаваемого всеми остальными зарядами (на пластинах и поляризационных зарядов на границах диэлектриков, примыкающих к пластинам). В этом случае напряженности полей внутри диэлектриков описываются формулами

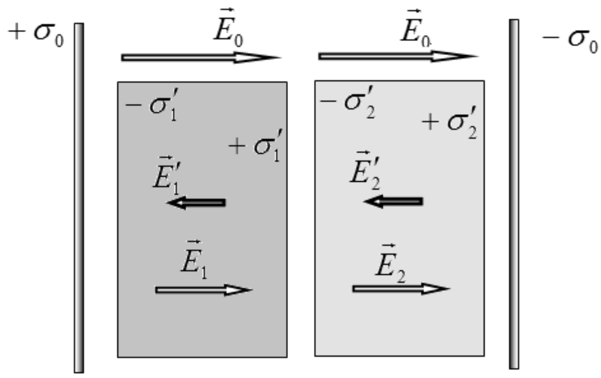
$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{E_0}{\varepsilon_1} = E_e - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \\ E_2 &= \frac{E_0}{\varepsilon_2} = E_e + \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \end{aligned}. \tag{6}$$

Из этих формул следует

$$\frac{E_0}{\varepsilon_2} - \frac{E_0}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \sigma' = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} E_0 \tag{7}$$

Подставляя выражение (4), окончательно получим

$$\frac{E_0}{\varepsilon_2} - \frac{E_0}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \sigma' = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \frac{2\varepsilon_0}{h} U_0 \tag{8}$$



Способ 2. Поле внутри диэлектрика $\vec{E}_1 = \dfrac{\vec{E}_0}{\varepsilon_1}$ может быть представлено как сумма внешнего поля $\vec{E}_0$ и поля $E_1' = \dfrac{\sigma_1'}{\varepsilon_0}$, создаваемого поляризационными зарядами:

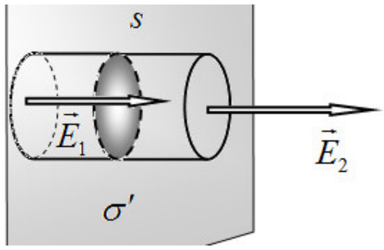
$$\frac{E_0}{\varepsilon_1} = E_0 - \frac{\sigma_1'}{\varepsilon_0}. \tag{9}$$

Откуда находим

$$\sigma_1' = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 - 1}{\varepsilon_1} E_0. \tag{10}$$

Поверхностная плотность зарядов на втором диэлектрике описывается аналогичной формулой. Суммарная плотность заряда на границе равна $\sigma' = \sigma_1' - \sigma_2' = \varepsilon_0 E_0 \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 \varepsilon_2}$, что совпадает с формулой (7).

Способ 3. Используем теорему Гаусса для поверхности изображенной на рисунке.

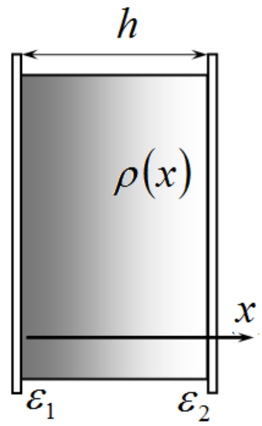


$$E_2 s - E_2 s = \frac{\sigma' s}{\varepsilon_0}.$$

Из этой формулы следует $\sigma' = \varepsilon_0\left(\frac{E_0}{\varepsilon_2} - \frac{E_0}{\varepsilon_1}\right)$, что приводит, как это не странно, к тому же результату (10).

1.2 Решение этой части задачи, в принципе, аналогично решению предыдущей части.

1.2.1 Сначала выразим параметры зависимости диэлектрической проницаемости от координаты

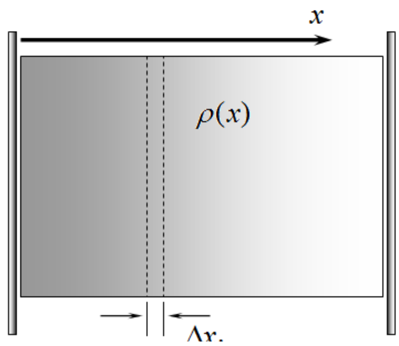


$$\varepsilon(x) = \frac{1}{ax+b} \tag{11}$$

через граничные значения. Для этого запишем и решим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_1} = b \\ \frac{1}{\varepsilon_2} = ah + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{1}{\varepsilon_1} \\ a = \frac{1}{h}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \end{cases} \tag{12}$$

1.2.2 Для расчета емкости конденсатора представим его как совокупность последовательно соединенных конденсаторов малой толщины Δx_i, емкости которых равны

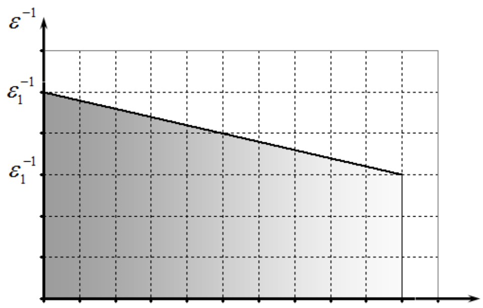


$$C_i = \frac{\varepsilon(x)\varepsilon_0 S}{\Delta x_i}. \tag{13}$$

При последовательном соединении суммарная емкость рассчитывается по формуле

$$\frac{1}{C} = \sum_i \frac{1}{C_i} = \sum_i \frac{1}{\varepsilon(x)\varepsilon_0 S}\Delta x_i = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\sum_i \frac{\Delta x_i}{\varepsilon(x)}. \tag{14}$$

При малых Δx_i сумма в выражении (14) равна площади под графиком зависимости $\varepsilon^{-1}(x)$. Так как эта зависимость линейна, то в результате суммирования получим



$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\sum_i \frac{\Delta x_i}{\varepsilon(x)} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\frac{h}{2}\left(\varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2^{-1}\right) = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\frac{h}{2}\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2}.$$

Тогда емкость конденсатора оказывается равной

$$C = 2\frac{\varepsilon_0 S}{h}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}. \tag{15}$$

Для расчета объемной плотности поляризационных зарядов запишем выражение для напряженности электрического поля

$$E(x) = \varepsilon^{-1}(x)E_0, \tag{16}$$

где E_0 - как и ранее напряженность поля создаваемого только зарядами на пластинах. Разность потенциалов между пластинами в данном случае определяется формулой

$$U_0 = \sum_i E(x)\Delta x_i = E_0 \sum_i \varepsilon^{-1}(x)\Delta x_i \,. \tag{17}$$

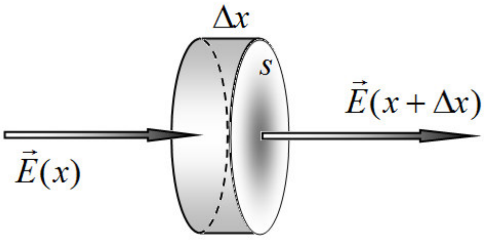
Эту сумму мы уже вычисляли, поэтому сразу запишем

$$\begin{aligned} &U_0 = E_0 \sum_i \varepsilon^{-1}(x)\Delta x_i = E_0 \frac{h}{2}\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2} \quad \Rightarrow \\ &E_0 = 2\frac{U_0}{h}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \end{aligned} \,. \tag{18}$$

Таким образом, зависимость напряженности от координаты имеет вид

$$E(x) = \frac{E_0}{\varepsilon(x)} = 2\frac{U_0}{h}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\varepsilon^{-1}(x)\,. \tag{19}$$

Для расчета зависимости плотности заряда от координаты воспользуемся самым коротким способом, основанном на теореме Гаусса (хотя приемлем и любой из ранее рассмотренных). Так для тонкого цилиндра толщиной Δx, оснований которого параллельны пластинам, имеем:



$$E(x+\Delta x)s - E(x)s = \frac{\rho(x)\Delta x}{\varepsilon_0}\,. \tag{20}$$

Из этой формулы следует, что

$$\rho(x) = \varepsilon_0\frac{\Delta E}{\Delta x} = 2\varepsilon_0\frac{U_0}{h}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{\Delta\varepsilon^{-1}(x)}{\Delta x} = 2\varepsilon_0\frac{U_0}{h}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}a$$

,

где a - коэффициент, найденный ранее (формула (12)). С учетом этой формулы получим

$$\rho(x) = \varepsilon_0\frac{\Delta E}{\Delta x} = 2\varepsilon_0\frac{U_0}{h}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\frac{\Delta\varepsilon^{-1}(x)}{\Delta x} = 2\varepsilon_0\frac{U_0}{h^2}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2}\,. \tag{21}$$

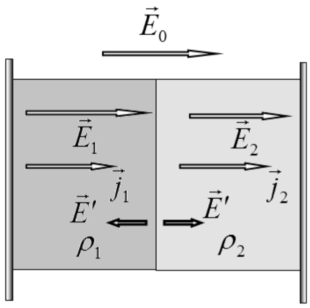
Отметим, что объемная плотность поляризационных зарядов постоянна по объему диэлектрика.

Часть 2. Переменная проводимость.

2.1.1 Сопротивление резистора найдем как сумму двух последовательно соединенных резисторов

$$R = \rho_1\frac{h}{2S} + \rho_2\frac{h}{2S} = \frac{\rho_1+\rho_2}{2}\frac{h}{S}\,. \tag{22}$$

2.1.2 Поясним причину возникновения заряда в этом случае. При включении внешнего поля плотности токов будут различным, что приведет к накоплению зарядов на границе раздела. Эти заряды будут изменять плотности токов в разных материалах до тех пор, пока плотности токов не сравняются. Итак. в установившемся режиме будет выполняться условие



$$j_1 = j_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{E_1}{\rho_1} = \frac{E_2}{\rho_2} \tag{23}$$

Как уже было отмечено, различия в напряженностях полей обусловлены полем, создаваемым зарядами на границе, поэтому

$$E_1 = E_0 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}, \quad E_2 = E_0 + \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}.$$

Здесь E_0 - напряженность поля, создаваемого всеми зарядами, кроме зарядов на границе. Из уравнений (23)-(24) найдем

$$\frac{1}{\rho_1}\left(E_0 - \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{\rho_2}\left(E_0 + \frac{\sigma'}{2\varepsilon_0}\right) \quad \Rightarrow \quad \sigma' = 2\varepsilon_0 E_0 \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \tag{24}$$

Из формул (24) и определения напряжения следует, что величина E_0 может быть легко найдена

$$U_0 = E_1 \frac{h}{2} + E_1 \frac{h}{2} = E_0 h \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{U_0}{h} \tag{25}$$

Поэтому поверхностная плотность зарядов на границе равна

$$\sigma' = 2\varepsilon_0 E \frac{U_0}{h}\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}. \tag{26}$$

2.2 Основная идея решения этой части заключается в постоянстве плотности тока, т.е.

$$j = \frac{E}{\rho} = const. \tag{27}$$

Поэтому напряженность поля внутри проводника изменяется по закону

$$E(x) = j\rho(x) \tag{28}$$

Зависимость удельного сопротивления от координаты линейна, с учетом значений на границе эта зависимость имеет вид

$$\rho(x) = \rho_1 + \frac{\rho_2 - \rho_1}{h}x. \tag{29}$$

Для определения плотности тока запишем выражение для напряжения между пластинами резистора

$$U_0 = \sum_i E(x)\Delta x = \sum_i j\rho(x)\Delta x = j\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}h. \tag{30}$$

из которого выразим

$$j = \frac{2U_0}{h(\rho_1 + \rho_2)}. \tag{31}$$

Ранее было получено, что плотность[2] заряда определяется формулой $\gamma(x) = \varepsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta x}$.

Используя эту формулу, а также выражения (28) , (29), (31), найдем

$$\gamma(x) = \varepsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta x} = \varepsilon_0 j \frac{\Delta \rho}{\Delta x} = \varepsilon_0 \frac{2U_0}{h(\rho_1 + \rho_2)}\frac{\rho_2 - \rho_1}{h} = \frac{2\varepsilon_0 U_0}{h^2}\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1 + \rho_2}. \tag{32}$$

Как и в первой части, объемная плотность заряда оказалась постоянной.

<u>Последнее замечание.</u> Вторую часть задачи можно было и не решать!
В первой части расчет электрического поля сводился к решению системы уравнений

$$E(x) = \varepsilon^{-1}(x)E_0 = (ax + b)E_0, \quad \sum_i E(x)\Delta x = U_0,$$

А во второй

$$E(x) = \rho(x)j = (ax + b)j, \quad \sum_i E(x)\Delta x = U_0,$$

Эти систему уравнений полностью совпадают, если E_0 заменить на j, ε^{-1} заменить на ρ. Достаточно было просто переписать формулы с учетом этих замен!

[2] Чтобы не путать с удельным электрическим сопротивлением, обозначим плотность заряда γ.