Задача 10-1. Вода из воздуха

1.1. Согласно определению относительной влажности начальное давление водяного пара в сосуде составляет $p_1 = \varphi p_{н1}$, где $p_{н1}$ – давление насыщенного водяного пара при комнатной температуре T_1. Из графика на бланке можно определить: $p_{н1} \approx 2{,}35$ кПа. Стоит отметить, что парциальное давление водяного пара в полном давлении воздуха в сосуде составляет лишь тысячные части, а поскольку, согласно числовым данным задачи, требуемая точность решения составляет две значащие цифры, в дальнейшем влиянием водяного пара на полное давление воздуха можно будет пренебречь.

При изотермическом сжатии сосуда давление газов в нем, в том числе и водяного пара, будет увеличиваться. По достижению давления $p_{н1}$ последний начнет конденсироваться. Используя выражение для квазитстационарного изотермического процесса с водяным паром, считая его идеальным газом, получим $\varphi p_{н1} V_1 = p_{н1} V_в$, где $V_в$ – объем газов в сосуде, при котором начнет появляться влага. Отсюда:

$$V_в = \varphi V_1 = 0{,}77 \cdot 5{,}0 \text{ л} = 3{,}85 \text{ л}$$

Требуемая точность вычислений, согласно данным в условии задачи, – две значащие цифры. Однако мы будем приводить три из них для того, чтобы полученные величины можно было использовать в дальнейших вычислениях, не опасаясь за нарастание погрешности округления. Повторимся, окончательный ответ получается путем округления всех полученных в решении величин до двух значащих цифр.

1.2. Максимальное давление газов в сосуде, оказываемое как Федей, так и атмосферой, составляет $1{,}5p_{атм}$. Пренебрегая парциальным давлением водяного пара и объемом образовавшейся жидкости, запишем уравнение для изотермического процесса с воздухом в сосуде: $p_{атм} V_1 = 1{,}5 p_{атм} V_2$, откуда:

$$V_2 = V_1/1{,}5 = 5{,}0 \text{ л}/1{,}5 = 3{,}33 \text{ л}$$

Сравнивая результаты пунктов А1 и А2 видим, что Федина установка действительно позволяет конденсировать водяной пар.

1.3 Так как давление водяного пара не может быть больше насыщенного, при уменьшении объема после значения $V_в$ оно будет оставаться постоянным за счет уменьшения химического количества водяного пара в сосуде. Уменьшение произойдет на количество, соответствующее количеству образовавшейся воды. Химическое количество водяного пара в начальном и конечном состоянии можно определить из уравнения Менделеева-Клапейрона $pV = \nu RT$, а массу воды найдем, зная ее молярную массу:

$$m_A = M(\nu_1 - \nu_2) = M\left(\frac{\varphi p_{н1} V_1}{RT_1} - \frac{p_{н1} V_2}{RT_1}\right) = \frac{M p_{н1}}{RT_1}(\varphi V_1 - V_2) = \frac{M p_{н1}}{RT_1}(V_в - V_2)$$

$$m_A = \frac{1{,}8 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}} \cdot 2{,}35 \cdot 10^3 \text{ Па}}{8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{К} \cdot \text{моль}} (273 + 20)\text{К}} (3{,}85 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 - 3{,}33 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3) = 9{,}03 \cdot 10^{-6} \text{ кг}$$

Таким образом, за одно сжатие Федя может получить всего 9,03 мг воды.

1.4. Стакан воды можно насобирать за $N_A = m_c/m_A = 22148$ сжатий.

1.5 Несмотря на особенности изменения давления водяного пара при сжатии содержимого сосуда, основное количество работы, совершаемое Федей, определяется давлением всего воздуха, так как последнее гораздо больше. Ввиду того, что давление газов в сосуде изменяется в ходе изотермического процесса, для грубой оценки совершенной работы будем использовать среднее арифметическое значение: $p_{ср} = (p_{атм} + 1{,}5p_{атм})/2 = 1{,}25p_{атм}$. Тогда работа, совершенная Федей, равна работе газа, взятой со знаком «минус», и определяется выражением:

$$A_{сж} = -p_{ср}(V_2 - V_1) = 211 \text{ кДж}$$

1.6 От начала процесса до точки конденсации водяного пара диаграмма соответствует изотермическому процессу и представляет собой участок гиперболы. Далее процесс конденсации происходит при постоянном давлении (насыщенного пара). Обратное расширение после сбора влаги снова протекает изотермически по участку другой гиперболы из-за нового химического количества пара до первоначального объема. Далее при постоянном объеме и открытом отверстии химическое количество пара возвращается к первоначальному (возвращается исходная влажность воздуха) и диаграмма замыкается. Схематичное изображение процесса представлено на рисунке 1.

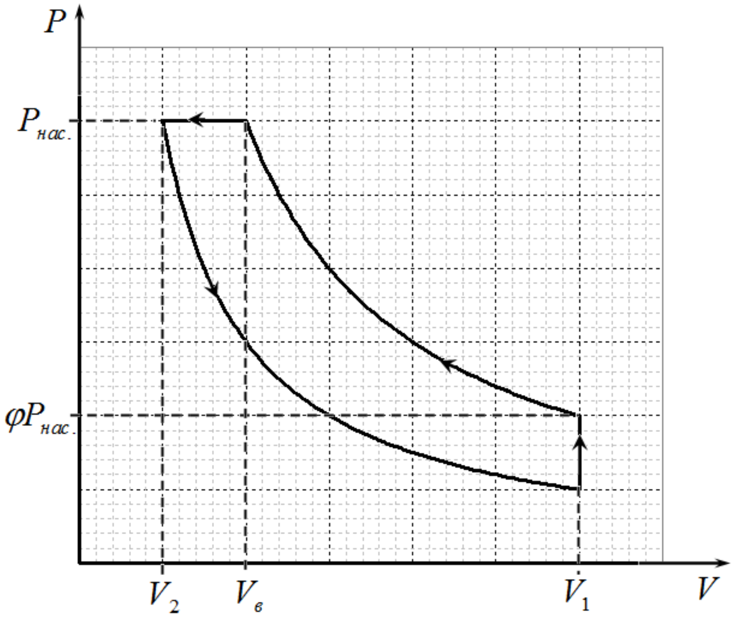


Рисунок 1 - Схематическая p-V диаграмма цикла

1.7 В ходе циклического процесса весь воздух в сосуде, пренебрегая парциальным давлением водяного пара, при сжатии и расширении проходит через одни те же состояния. Тогда работа, затраченное на сжатие и расширение всего воздуха по модулю совпадает и в сумме дает нуль. Следовательно, стоит присмотреться к работе, затраченной на процесс, произведенный непосредственно с водяным паром, даже если его парциальное давление незначительно (оно все же больше нуля). Последнюю можно рассчитать, как площадь, ограниченную построенной *p-V* диаграммой цикла.

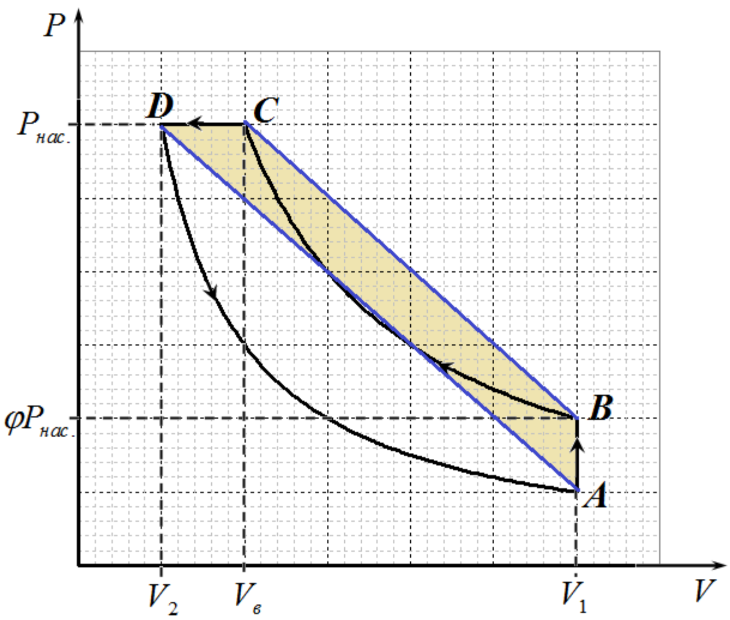


Рисунок 2 - Построения на диаграмме для расчета работы

Для грубой оценки этой работы «спрямим» криволинейные участки (рис. 2). Для расчета площади достроим фигуру до треугольника *CED*. Также нам понадобится давление в точке *D*. Его можно найти, используя уравнение изотермы *BC*: $p_{н1}V_2 = p_cV_1$. Отсюда:

$p_D = p_{н1}\cdot V_2/V_1$ = 1,57 кПа. Работа Феди равна работе газа в ходе цикла, взятой со знаком минус. Учитывая тот факт, что цикл на диаграмме направлен против часовой стрелки, работа экспериментатора будет равна просто площади, ограниченной диаграммой *ABCD*, которую можно рассчитать как разность площадей треугольников:

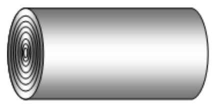
$$A_A = S_{ABCD} = S_{CED} - S_{BEA} = \frac{1}{2}(CE\cdot DE - BE\cdot AE)$$

$$A_A = \frac{1}{2}\left((V_1 - V_2)(p_{н1} - p_D) - (V_1 - V_в)(p_{н1} - \varphi p_{н1})\right) = 0{,}341 \text{ Дж}$$

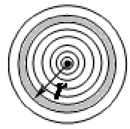
1.8 Согласно определению введенной удельной работы конденсации получаем:

$$\Theta_A = A_A/m_A = 37{,}7 \text{ кДж/кг}$$

Задача10- 2. Слоистые резисторы



1.1 Мысленно разобьем проводник на тонкие коаксиальные трубки, толщины Δr_i которых значительно меньше их радиуса r_i ($\Delta r_i << r_i$).



Одна из таких трубок, сопротивление которой $R_i = \rho_i \dfrac{l}{S_i}$, выделена на рисунке. В данном случае трубки соединены параллельно, следовательно, сопротивление резистора следует искать по закону параллельного соединения резисторов

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i} = \sum_{i=1}^{n}\frac{S_i}{\rho_i l} = \sum_{i=1}^{n}\frac{2\pi r_i \Delta r_i}{l\alpha r_i} = \frac{2\pi}{\alpha l}\sum_{i=1}^{n}\Delta r_i = \frac{2\pi a}{\alpha l}, \quad (1)$$

где $S_i = 2\pi r_i \Delta r_i$ – площадь поперечного сечения выделенной на рисунке тонкой трубки. Следовательно, сопротивление резистора в данном случае

$$R_1 = \frac{\alpha l}{2\pi a} = 10 \text{ Ом}. \quad (2)$$

1.2 Сила тока через резистор в этом случае

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{2\pi a}{\alpha l}U = 0{,}15 \text{ А}. \quad (3)$$

Соответственно, выражение для выделяемой мощности принимает вид

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} = \frac{2\pi a}{\alpha l}U^2 = 0{,}23 \text{ Вт}. \quad (4)$$

Поскольку удельное сопротивление данного резистора минимально на оси цилиндра, то, согласно (4) больше всего будет нагреваться его сердцевина.

1.3 В установившемся режиме количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в цилиндре некоторого радиуса r (т.е. тепловой поток $q(r)$), должно отводиться наружу через его боковую поверхность $S = 2\pi r l$. В противном случае температура трубки должна была бы меняться. Из формулы (1) следует, что проводимость любого цилиндра, находящегося внутри рассматриваемого