$p_D = p_{н1} \cdot V_2/V_1 = 1{,}57$ кПа. Работа Феди равна работе газа в ходе цикла, взятой со знаком минус. Учитывая тот факт, что цикл на диаграмме направлен против часовой стрелки, работа экспериментатора будет равна просто площади, ограниченной диаграммой *ABCD*, которую можно рассчитать как разность площадей треугольников:

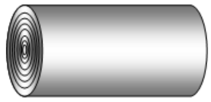
$$A_A = S_{ABCD} = S_{CED} - S_{BEA} = \frac{1}{2}(CE \cdot DE - BE \cdot AE)$$

$$A_A = \frac{1}{2}\left((V_1 - V_2)(p_{н1} - p_D) - (V_1 - V_в)(p_{н1} - \varphi p_{н1})\right) = 0{,}341 \text{ Дж}$$

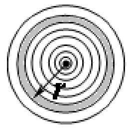
1.8 Согласно определению введенной удельной работы конденсации получаем:

$$\Theta_A = A_A/m_A = 37{,}7 \text{ кДж/кг}$$

Задача10- 2. Слоистые резисторы



1.1 Мысленно разобьем проводник на тонкие коаксиальные трубки, толщины Δr_i которых значительно меньше их радиуса r_i $(\Delta r_i << r_i)$.



Одна из таких трубок, сопротивление которой $R_i = \rho_i \dfrac{l}{S_i}$, выделена на рисунке. В данном случае трубки соединены параллельно, следовательно, сопротивление резистора следует искать по закону параллельного соединения резисторов

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + ... + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{\rho_i l} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2\pi r_i \Delta r_i}{l \alpha r_i} = \frac{2\pi}{\alpha l} \sum_{i=1}^{n} \Delta r_i = \frac{2\pi a}{\alpha l}, \quad (1)$$

где $S_i = 2\pi r_i \Delta r_i$ – площадь поперечного сечения выделенной на рисунке тонкой трубки. Следовательно, сопротивление резистора в данном случае

$$R_1 = \frac{\alpha l}{2\pi a} = 10 \text{ Ом}. \quad (2)$$

1.2 Сила тока через резистор в этом случае

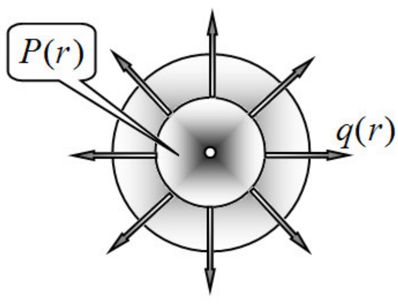
$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{2\pi a}{\alpha l} U = 0{,}15 \text{ А}. \quad (3)$$

Соответственно, выражение для выделяемой мощности принимает вид

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1} = \frac{2\pi a}{\alpha l} U^2 = 0{,}23 \text{ Вт}. \quad (4)$$

Поскольку удельное сопротивление данного резистора минимально на оси цилиндра, то, согласно (4) больше всего будет нагреваться его сердцевина.

1.3 В установившемся режиме количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в цилиндре некоторого радиуса r (т.е. тепловой поток $q(r)$), должно отводиться наружу через его боковую поверхность $S = 2\pi r l$. В противном случае температура трубки должна была бы меняться. Из формулы (1) следует, что проводимость любого цилиндра, находящегося внутри рассматриваемого



резистора и коаксиального с ним, пропорциональна радиусу этого цилиндра. Поэтому выражение для мощности теплоты, выделяющейся внутри выделенного цилиндра, аналогично формуле (4). Тогда уравнение для потока теплоты будет иметь вид

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{\alpha l} U^2 = -\gamma \frac{\Delta T}{\Delta r} \cdot S = -\gamma \frac{\Delta T}{\Delta r} \cdot 2\pi r l \quad \Rightarrow \quad \Delta T = -\frac{U^2}{\alpha \gamma l^2} \Delta r \ . \qquad (5)$$

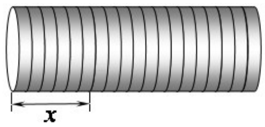
Согласно (5) приращение температуры данного слоя обратно по знаку приращению радиуса резистора, т.е. температура внутри него падает при увеличении r. Это означает, что максимальная температура резистора будет на его оси симметрии. Так и должно быть, поскольку теплота самопроизвольно перетекает от горячего слоя к холодному, а не наоборот

Суммируя (5) по всем слоям, найдем, что максимальная температура $T_{\max 1}$ в центре резистора будет равна

$$T_{\max 1} = T_0 - \Delta T = T_0 + \frac{U^2}{\alpha \gamma l^2} a = 46°\text{C} \ . \qquad (6)$$

2. «Блинная структура»

3.



2.1 Рассмотрим блинную структуру. В этом случае сопротивление зависит от расстояния по закону $\rho(x) = \alpha \cdot x$, следовательно, для вычисления сопротивления последовательно соединенных «блинов» справедливо выражение

$$R_2 = R_1 + R_2 + ... + R_n = \sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{i=1}^{n} \rho_i \frac{\Delta x_i}{S} = \frac{\alpha}{S} \sum_{i=1}^{n} x_i \Delta x_i = \\ = \frac{\alpha l^2}{2S} = \frac{\alpha l^2}{2\pi a^2} = 1{,}0 \cdot 10^2 \text{ Ом} = 0{,}10 \text{ кОм} \ . \qquad (7)$$

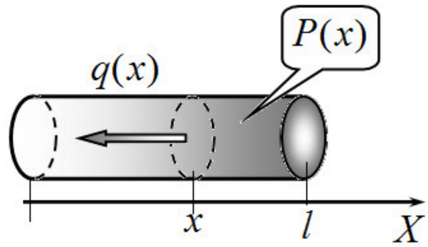
2.2 Силу тока в резисторе найдём по закону Ома

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{2\pi a^2}{\alpha l^2} U = 15 \text{ мА} \qquad (8)$$

Согласно закону Джоуля-Ленца мощность тока, выделяемая в таком проводнике

$$P_2 = \frac{U^2}{R_2} = \frac{2\pi a^2}{\alpha l^2} U^2 = 2{,}3 \cdot 10^{-2} \text{ Вт} = 23 \text{ мВт} \ . \qquad (9)$$

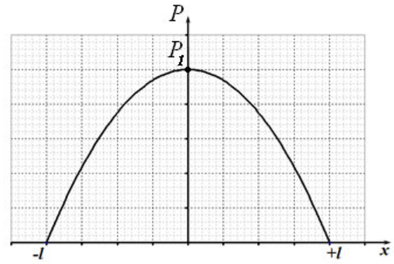
Поскольку удельное сопротивление возрастает слева направо, то при прохождении тока больше нагреется правый конец цилиндра, где его удельное сопротивление больше.



2.3 Как следует из формулы (7), сопротивление резистора на участке от x до l равно $R_{l-x} = \frac{\alpha}{2S}(l^2 - x^2)$. Поскольку сила тока в любом поперечном сечении резистора одинакова, то мощность тока, выделяемая на рассматриваемом участке резистора длиной $l - x$, может быть найдена как

$$P_{l-x} = I_2^{\,2}\,\frac{\alpha(l^2-x^2)}{2S} = \left(\frac{2\pi a^2}{\alpha l^2}U\right)^2 \frac{\alpha(l^2-x^2)}{2S} = \frac{2\pi a^2 U^2}{\alpha l^4}(l^2-x^2)\,. \qquad (10)$$

График этой функции представляет собой параболу (см. рис.), ветви которой направлены вниз.



В установившемся режиме тепловой поток $q(x)$, проходящий через поперечное сечение проводника на расстоянии x от его конца (см. рис) должен быть равен мощности, выделяющейся справа от рассматриваемого сечения (10), иначе температура резистора продолжила бы меняться. Согласно закону Фурье для теплопередачи

$$q(x) = -\gamma\frac{\Delta T}{\Delta x}S = P_{l-x} = \frac{2\pi a^2 U^2}{\alpha l^4}(l^2-x^2)\quad . \qquad (11)$$

Выражая из (12) малое приращение температуры , получим

$$\Delta T = -\frac{2\pi a^2 U^2}{S\gamma\alpha l^4}(l^2-x^2)\Delta x\ . \qquad (12)$$

Знак «-» в (12) говорит о том, что тепловой поток направлен против положительного направления оси Ox .

Суммируя (12), получим, что повышение температуры правого конца стержня пропорционально площади под графиком параболы. С учетом замечания из условия задачи, имеем

$$T_{\max 2} = T_0 + \Delta T = T_0 + \frac{2\pi a^2 U^2}{\gamma\alpha l^4}\sum(l^2 - x_i^{\,2})\Delta x_i = T_0 + \frac{2U^2}{\gamma\alpha l^2}\cdot\frac{2}{3}l = 370\,°\mathrm{C} = 3{,}7\cdot 10^2\,°\mathrm{C}\ . \qquad (13)$$

2.4 В рассматриваемом случае плотность тока ($j = I/S$, $[j] = \text{А/м}^2$) не меняется вдоль резистора, поскольку площадь его поперечного сечения остается постоянной. Так как удельное сопротивление рассматриваемого резистора изменяется, то должна изменяться и напряженность поля внутри цилиндра, что возможно только при накоплении объемных зарядов внутри него! Согласно закону Ома в дифференциальной форме (для плотности тока) можем записать

$$j = \frac{1}{\rho}\cdot E \;\;\Rightarrow\;\; E = \rho\cdot j\ , \qquad (14)$$

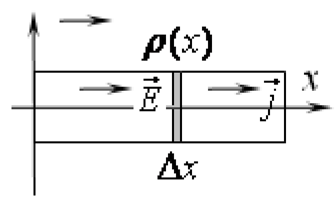
где E – напряженность электрического поля в данном сечении резистора. С учетом зависимости $\rho(x) = \alpha\cdot x$ получаем

$$E(x) = \alpha x\cdot\frac{I_2}{S} = \frac{2U}{l^2}\cdot x\,. \qquad (16)$$

Следовательно, для приращения напряженности электрического поля справедливо выражение

$$\Delta E = j\cdot\Delta\rho\ . \qquad (15)$$

Приращение напряженности поля связано с объемным зарядом, «сидящим» на малом слое проводника толщиной Δx



$$\Delta E = \frac{\rho\Delta x}{\varepsilon_0} \;\;\Rightarrow\;\; j\Delta\rho = \frac{\rho^*\Delta x}{\varepsilon_0} \quad \rho^* = \frac{\Delta\rho}{\Delta x}\varepsilon_0 j\ . \qquad (16)$$

При выводе этого соотношения использована формула для напряженности поля, создаваемого тонким слоем заряда.

2.6 Используя (16), суммируя по слоям, найдем полный заряд, «сидящий» внутри резистора на всем его протяжении

$$q^* = \sum_{i=1}^{n} q^*_i = \sum_{i=1}^{n} \rho_i^* S\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_0 jS\Delta\rho_i = \varepsilon_0 jS\sum_{i=1}^{n} \Delta\rho_i = \varepsilon_0 I\alpha l = \frac{2\pi\varepsilon_0 a^2}{l}U = 1{,}7\cdot 10^{-13}\ \text{Кл} \quad . \tag{17}$$

Интересно, что согласно (18) , это соответствует динамической электроемкости резистора

$$C = \frac{q^*}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0 a^2}{l} = \frac{2\varepsilon_0 S}{l} = 1{,}1\cdot 10^{-13}\ \Phi = 0{,}11\ \text{п}\Phi \ . \tag{18}$$

Задача 10- 3. Просто цепь

Первоначально цепь может показаться симметричной относительно горизонтальной линии, проходящей через центр рисунка, что позволило бы отбросить участок цепи *KE* (рисунок 1), поскольку ток через него не идет. Однако такое предположение неверно, поскольку элементы с несимметричной вольтамперной характеристикой – диоды – включены навстречу друг другу. Если напряжение приложено к диоду в обратном направлении, то, согласно вольтамперной характеристике, ток через него не идет. Так, ток не пойдет через нижний диод *Д*.

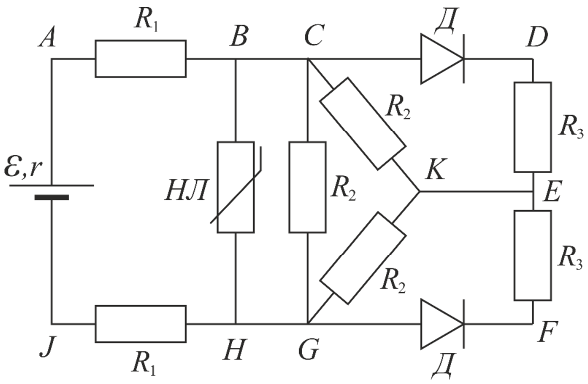


Рисунок 3 - Схема электрической цепи с обозначениями ключевых точек

Действительно, если предположить, что через оба диода ток в соответствующем направлении все же идет, то получим, что потенциал в точках *C* и *G* больше потенциала в точке *E*. Но тогда токи в узел *K* со всех сторон будут входить и никуда не выходить, чего быть не может. Таким образом, ток через нижний диод *Д* на самом деле не будет проходить и, соответственно, ток через нижний резистор R_3 равен нулю. Поскольку ток и напряжение резисторе связаны линейным соотношением, то напряжение на нижнем резисторе R_3 также равно нулю. В силу отсутствия тока для дальнейшего изучения цепи участок *GFE* можно отбросить (рис. 2).

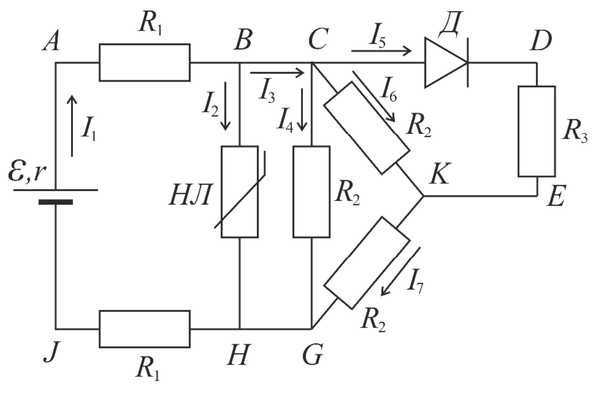


Рисунок 4 - Схема электрической цепи после отбрасывания участка с "закрытым" диодом

Так как вольт-амперная характеристика для нелинейного элемента задана графически, то для нахождения тока I_2, проходящего через него, будем использовать графический метод. Для этого необходимо найти связь между напряжением на нелинейном элементе U_{BH} и током через него I_2, определяемую всеми остальными элементами цепи.