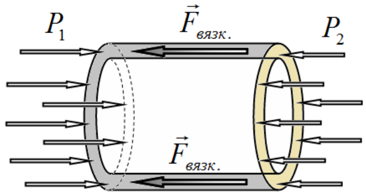
## Задача 11-1. Гидроатмосферный подъемник

### 1. Введение.

1.1 Так расход жидкости постоянен, то любая порция жидкости движется без ускорения, следовательно, сумма сил действующих на любую выбранную часть жидкости, равна нулю.




Применяя эти рассуждения к жидкости в зазоре, можем утверждать, что разность сил давления (действующих на торцы жидкости) уравновешивается силами вязкого трения, действующими со стороны стенок:

$$\Delta P \cdot 2\pi Rh = F_{вязк.} \qquad (1)$$

Разность давлений следует выразить через расход с помощью формулы (1), приведенной в условии задачи:

$$q = \frac{\pi Rh^3}{6\eta l}\Delta P \quad \Rightarrow \quad \Delta P = \frac{6\eta l}{\pi Rh^3} q\,, \qquad (2)$$

Подставляя это выражение в формулу (1), получим формулу для суммарной силы вязкого трения, действующей на воду в зазоре:

$$F_{вязк.} = \Delta P \cdot 2\pi Rh = \frac{6\eta l}{\pi Rh^3} q \cdot 2\pi Rh = \frac{12\eta l}{h^2} \qquad (3)$$

1.2 По третьему закону Ньютона сила, действующая со стороны стенок на воду равна по модулю силе, действующей со стороны воды на стенку. Так как площади боковой поверхности цилиндра и стенок трубы в зазоре практически равны (т.к. $h \ll R$), а сила вязкого трения пропорциональна площади соприкосновения, то сила вязкого трения, действующая на боковую поверхность цилиндра, в два раза меньше силы, действующей на воду, поэтому

$$F_{бок.} = \frac{1}{2}\Delta P \cdot 2\pi Rh = \pi Rh\Delta P = \frac{6\eta l}{h^2} q\,. \qquad (4)$$

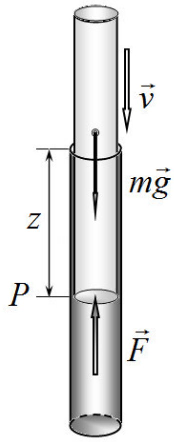
1.3 Понятно, что разность сил давлений, действующих на торцы цилиндра, равна

$$F_0 = \pi R^2 \Delta P\,. \qquad (5)$$

Следовательно, их отношение равно

$$\frac{F_{бок.}}{F_0} = \frac{\pi Rh\Delta P}{\pi R^2 \Delta P} = \frac{h}{R} \ll 1\,. \qquad (6)$$

Таким образом, в рассматриваемой ситуации илами вязкого трения можно пренебречь, по сравнению с разностью сил давления. Правда, эта разность сил давления зависит от расхода жидкости.




### Часть 2. Описание эффекта (пробирка в пробирке).

2.1 При опускании пробирки на нее действую силы тяжести $m\vec{g}$ и сила давления жидкости на дно пробирки $F = \pi R^2 \Delta P$. Как было показано ранее, в подобной ситуации можно пренебречь силой вязкого трения. Здесь ради укорочения формулой мы обозначили $\Delta P$ - разность между давлением жидкости на глубине $z$ и атмосферным давлением. Поэтому уравнение движения пробирки в квазистационарном приближении имеет вид

$$mg = \pi R^2 \Delta P\,. \qquad (7)$$

Отметим, что для величины $\Delta P$ нельзя использовать формулу для гидростатического давления, так жидкость в зазоре движется. Поэтому для нахождения этого давления запишем уравнение второго закона Ньютона для жидкости в зазоре (опять в квазистационарном приближении):

$$\Delta P \cdot 2\pi Rh = \rho(2\pi Rhz)g + F_{вязк.} \tag{8}$$

Смысл которого очевиден: разность сил давления уравновешивается силами тяжести и вязкого трения, действующими на воду в зазоре. Для силы вязкого трения справедлива полученная ранее формула (3). С ее учетом, получим

$$\Delta P \cdot 2\pi Rh = \rho(2\pi Rhz)g + \frac{12\eta z}{h^2}q \quad \Rightarrow \quad \Delta P = \rho gz + \frac{6\eta}{\pi Rh^3}zq \tag{9}$$

Расход воды, протекающей через зазор можно выразить через скорость движения пробирки (вся жидкость, вытесненная пробиркой, должна протечь через зазор): $q = \pi R^2 v$.
Подставляя эти выражения в уравнение (7) получим

$$mg = \pi R^2\left(\rho gz + \frac{6\eta z}{\pi Rh^3}\pi R^2 v\right) = \pi R^2 \rho gz + \frac{6\pi\eta R^3}{h^3}zv\,. \tag{10}$$

Движение пробирки прекратиться, когда скорость станет равной нулю, соответствующая максимальная глубина погружения определяется формулой:

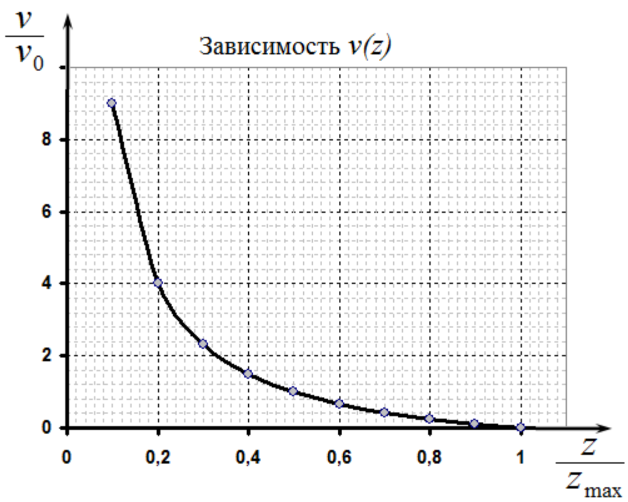
$$z_{\max} = \frac{m}{\pi R^2 \rho}\,. \tag{11}$$

Зависимость скорости от координаты $z$ можно выразить из уравнения (10)

$$v = \frac{mg - \pi R^2 \rho gz}{\frac{6\pi\eta R^3}{h^3}z} = \frac{\rho gh^3}{6\eta R}\frac{z_{\max} - z}{z} \tag{12}$$

Обозначим коэффициент в этой формуле (он имеет размерность скорости) $\frac{\rho gh^3}{6\eta R} = v_0$, тогда зависимость (12) приобретает вид

$$v = v_0\frac{z_{\max} - z}{z}\,. \tag{13}$$



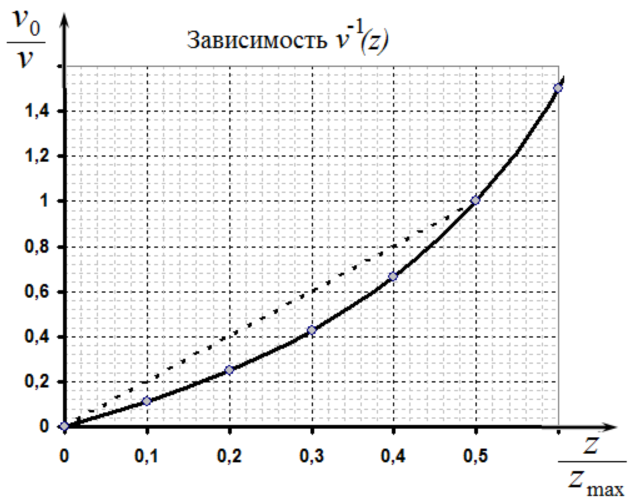




График этой функции показан на рисунке.
Для оценки времени движения в указанном диапазоне можно построить график обратной зависимости $v^{-1}(z)$ (см. рис.), тогда площадь под этим графиком численно равна времени движения, т.к. $\Delta t = \frac{\Delta z}{v}$. Для оценки площади плавную кривую можно заменить отрезком

прямой. На построенном графике в относительных единицах эта площадь равна 0,25. Переход к обычным единицам приводит к результату

$$\tau \approx 0{,}25\frac{z_{\max}}{v_0} \approx 0{,}25\frac{6\eta Rm}{\pi R^2\rho^2 gh^3}\ . \qquad (14)$$

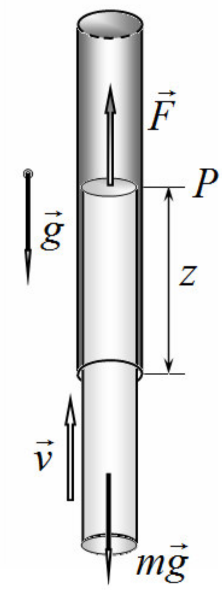
<u>*Замечания.*</u>

*1. Формула (11) может быть получена непосредственно из условия равновесия в пробирки (когда справедливы законы статики) – сила тяжести проверки уравновешивается силой Архимеда.*

*2. Точное значение времени движения может быть вычислено путем строгого интегрирования. Рассчитанное значение площади под кривой равно 0,2. Иными словами допущенная погрешность составляет величину порядка 20%.*

*3. Формально в рассмотренном квазистационарном приближении пробирка стартует с бесконечно большой скоростью. Это связано с тем, что в начальном положении пробирки отсутствует сила вязкого трения. Однако на конечный результат, это обстоятельство не играет существенной роли.*

2.2 Описание движения пробирки в перевернутом положении проводится аналогично проведенному в п. 2.2.




Уравнение движения пробирки имеет вид

$$mg = \pi R^2 \Delta P\ . \qquad (15)$$

здесь $\Delta P$ - разность между атмосферным давлением и давлением воды на высоте $z$ (которое меньше атмосферного).

Закон движение воды в зазоре

$$\rho(2\pi Rhz)g - \Delta P\cdot 2\pi Rh = F_{вязк.} \qquad (16)$$

Для силы вязкого трения, по-прежнему, справедлива формула (3), поэтому разность давлений в этом случае оказывается равным

$$\rho(2\pi Rhz)g - \Delta P\cdot 2\pi Rh = \frac{12\eta l}{h^2}q \quad \Rightarrow \quad \Delta P = \rho gz - \frac{6\eta R}{h^3}zv \qquad (17)$$

А уравнение движения пробирки

$$mg = \pi R^2\rho gz - \frac{6\pi\eta R^3}{h^3}zv\ . \qquad (18)$$

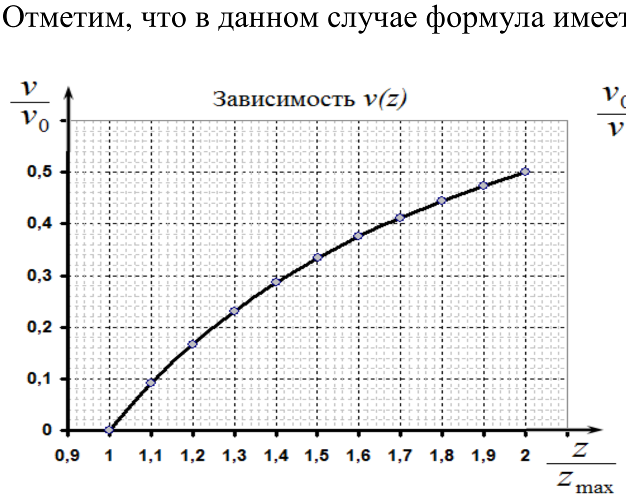
Из этого уравнения следует, что минимальная высота подъема пробирки, при которой начнется ее движение вверх, равна

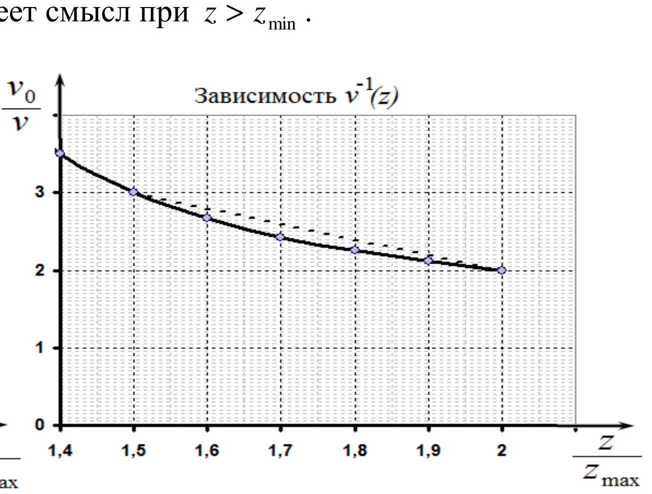
$$z_{\min} = \frac{m}{\pi R^2\rho}, \qquad (19)$$

что совпадает с максимальной глубиной погружения, полученной ранее. Зависимость скорости подъема имеет вид

$$v = \frac{\rho gh^3}{6\eta R}\frac{z - z_{\min}}{z}\ . \qquad (20)$$

Отметим, что в данном случае формула имеет смысл при $z > z_{\min}$.



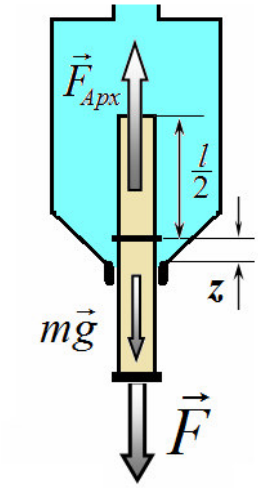
Графики этой зависимости и обратной ей $v^{-1}(z)$ показаны на рисунках.

Оценка времени движения в указанном диапазоне (проведенная по линейной аппроксимации зависимости $v^{-1}(z)$) равна

$$\tau \approx 0{,}75\frac{z_{\max}}{v_0} \approx 0{,}75\frac{6\eta Rm}{\pi R^2\rho^2 gh^3}. \tag{21}$$

3.1 Так как пробирка начинает подниматься при высоте ее погружения равной $l/4$, то при этом положении сила Архимеда равна силе тяжести:

$$\rho gS\frac{l}{4} = mg \quad \Rightarrow \quad m = \frac{1}{4}\rho Sl. \tag{22}$$




3.2 Так как процесс подъема можно считать квазистационарным, то при любом положении пробирки она находится в равновесии, условие которого имеет вид (с учетом формулы (22)):

$$\rho gS\left(\frac{l}{2}+z\right) = mg + F \quad \Rightarrow$$
$$F = \rho gSl\left(\frac{z}{l}+\frac{1}{4}\right) \tag{23}$$

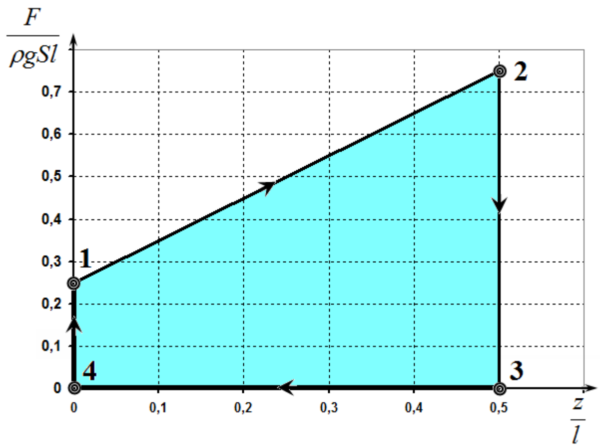
После того, как пробирка поднялась до максимальной высоты, внешнее устройство отключается, поэтому внешняя сила падает до $F = 0$. Так как вода наливается из резервуара быстро, то можно пренебречь просачиванием воды из бутылки за время ее опускания. Эти рассуждения позволяют построить график рассматриваемого циклического процесса:

$1 \to 2$: подъем пробирки, описываемый уравнением (23);

$2 \to 3$: отключение внешнего устройства;

$3 \to 4$: опускание пробирки;

$4 \to 1$: подключение внешнего устройства.




3.3 Из построенного графика следует, что работа совершенная подъемником равна

$$A = \frac{1}{4}\rho gSl^2 \tag{24}$$

3.4 Подъемник совершает полезную работу за счет того, что вода выливается через зазор между пробиркой и горлышком бутылки. Объем вытекшей за цикл воды равен половине объема пробирки, т.е. $\frac{1}{2}Sl$. Чтобы подъемник работал необходимо, чтобы уровень воды в бутылке превышал длину пробирки $l$. Поэтому минимальная высота, с которой должна выливаться вода также равна $l$. Следовательно, изменение ее потенциальной энергии равно $\Delta U = \frac{1}{2}\rho gSl^2$. Разумно определить КПД как отношение полезной работы к затраченной энергии. В этом случае КПД оказывается равным $\eta = \frac{A}{\Delta U} = 50\%$.