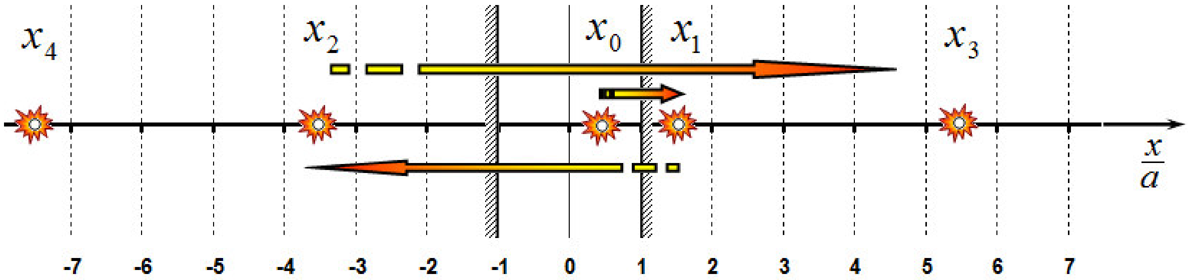
9 класс

Задача 9-1. Зеркала

1.1 Очевидно, что в данном случае число изображений будет бесконечно велико, из-за многократных отражений в параллельных зеркалах. Изображение в плоском зеркале располагается симметрично, т.е. расстояние от зеркала до изображения равно расстоянию от источника до зеркала.



Это позволяет записать координату первого изображения в правом зеркале (см. рис.)

$$x_1 = a + (a - x_0) = 2a - x_0. \tag{1}$$

Далее следует отобразить это изображение в левом зеркале, используя тоже правило построения:

$$x_2 = -a - (x_1 + a) = -2a - x_1. \tag{2}$$

После этого строим очередные изображения (сначала в правом зеркале, затем в левом) по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} x_{2n+1} &= 2a - x_{2n} \\ x_{2n} &= -2a - x_{2n-1} \end{aligned} \tag{3}$$

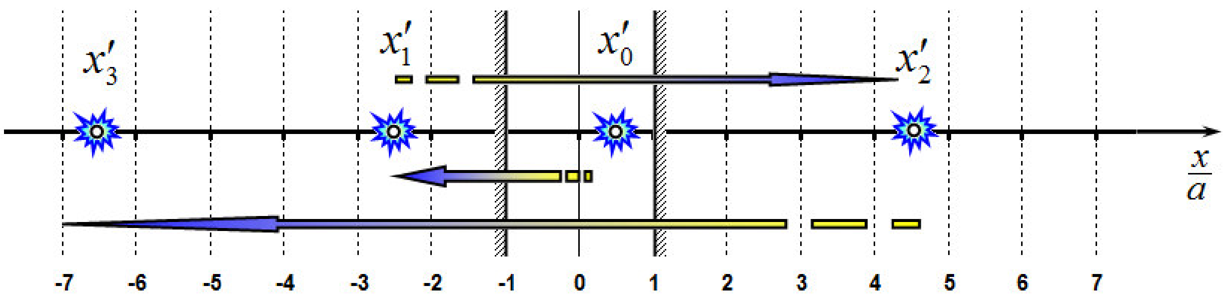
Координаты этих изображений можно выразить и в явном виде. Для этого отдельно выразим координаты четных и нечетных изображений

$$\begin{aligned} x_{2n} &= -2a - x_{2n-1} = -2a - (2a - x_{2n-2}) = x_{2n-2} - 4a \\ x_{2n+1} &= 2a - x_{2n} = 2a - (-2a - x_{2n-1}) = x_{2n-1} + 4a \end{aligned} \tag{4}$$

Из этих формул следует. что эти координаты образуют арифметические прогрессии

$$\begin{aligned} x_{2n} &= \frac{1}{2}a - 4na \quad n = 0,1,2... \\ x_{2n+1} &= \frac{3}{2}a + 4na \quad n = 0,1,2... \end{aligned}. \tag{5}$$

Аналогично следует построить вторую серию изображений, начиная с левого зеркала.



Для этой серии формулы для расчета координат имеют вид:
- для двух первых изображений:

$$x_1' = -a - (x_0 + a) = -x_0 - 2a$$
$$x_2' = a + (a - x_1') = -x_1' + 2a \qquad (6)$$

- для последующих изображений:

$$x_{2n+1}' = -x_{2n} - 2a$$
$$x_{2n+2}' = -x_{2n+1}' + 2a \qquad (7)$$

- наконец в явном виде:

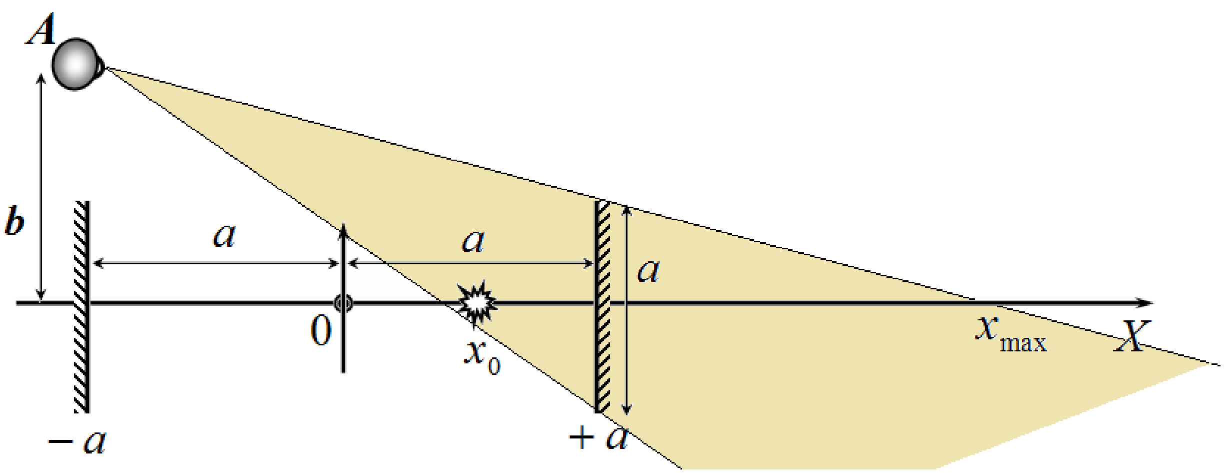
$$\begin{cases} x_{2n+1}' = -x_{2n} - 2a = -(-x_{2n-1}' + 2a) - 2a = x_{2n-1}' - 4a \\ x_{2n+2}' = -x_{2n+1}' + 2a = -(-x_{2n}' - 2a) + 2a = x_{2n}' + 4a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_{2n}' = \frac{1}{2}a + 4na \\ x_{2n+1}' = -\frac{5}{2}a - 4na \end{cases} \qquad (8)$$

В Таблице 1 приведены рассчитанные значения координат (в см) нескольких первых изображений.

n	$x_{2n+1} = 2a - x_{2n}$	$x_{2n} = -2a - x_{2n-1}$	$x_{2n+1}' = -x_{2n} - 2a$	$x_{2n+2}' = -x_{2n+1}' + 2a$
1	15		-25	
2		-35		45
3	55		-65	
4		-75		85
5	95		-105	

Теперь следует определить, какие из этих изображений видны с указанной точки расположения глаза. Из рисунка следует, что область видимости определяется размером правого зеркала, которое можно рассматривать как «окошко» через которое рассматривают изображения. Область видимости ограничивается крайним верхним лучом, отраженным от этого зеркала.



Из подобия треугольников следует, максимальная координата x_{max} точки оси, которая видна из точки A, определяется уравнением

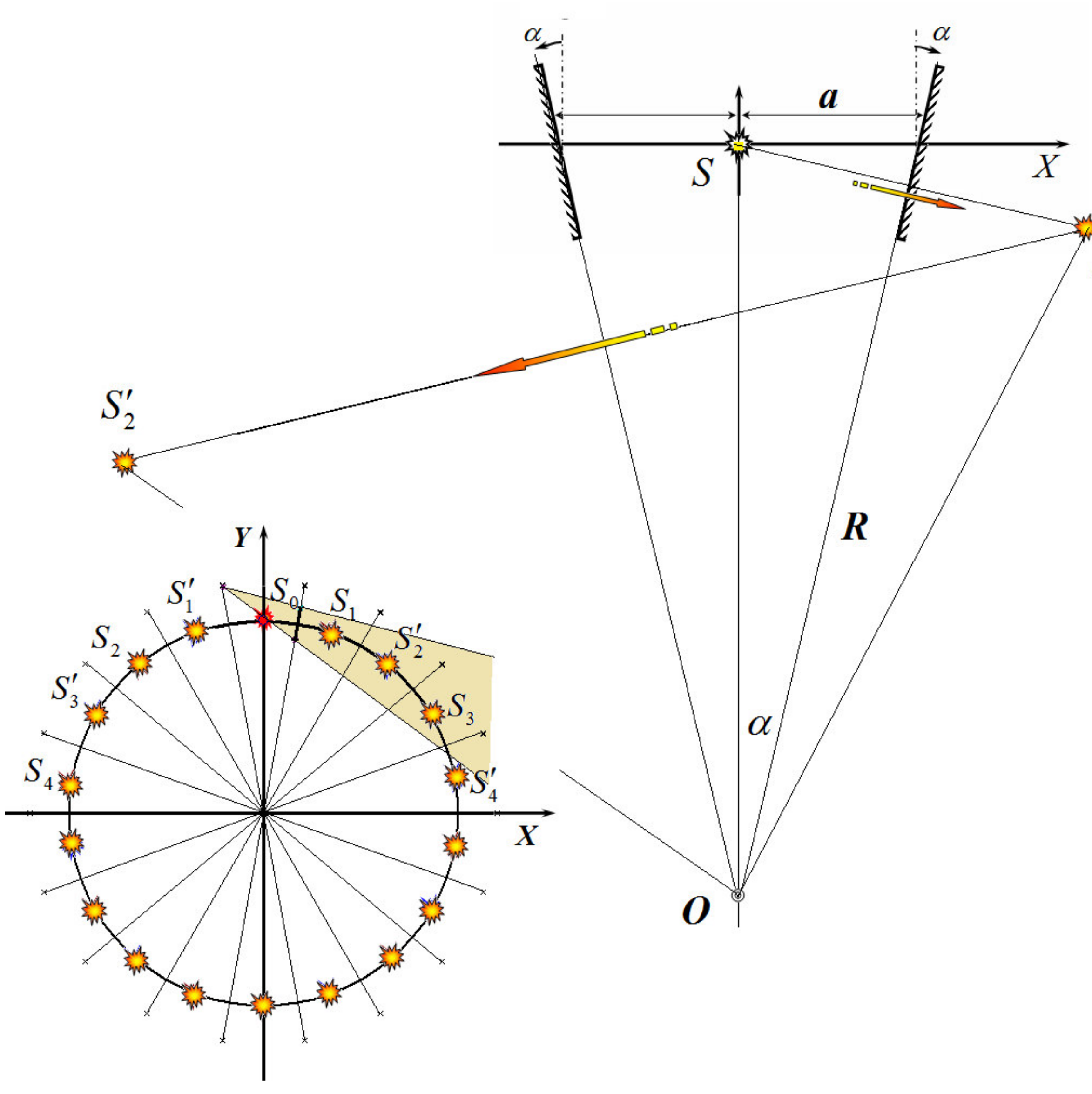
$$\frac{b}{x_{max} + a} = \frac{0{,}5a}{x_{max} + a}, \qquad (9)$$

Из которого следует, что

$$x_{\max} = \frac{ab + 0{,}5a^2}{b - 0{,}5a} = 26{,}7\,см. \tag{10}$$

Таким образом, при указанном положении глаза видно только одно изображение с координатой $x_1 = 15\,см$.

1.2 Если зеркала повернуть, то изображения выстоятся по окружности, центр которой O лежит в точке пересечения линий зеркал.



Действительно, первое изображение S_1' расположено симметрично плоскости правого зеркала, т.е. на том же расстоянии от точки O, что и источник S, аналогично и для всех последующих изображений. Как и параллельном расположении зеркал, следует построить две серии изображений: в первой серии начиная с правого зеркала, во второй – с левого.
Из рисунка следует, что радиус окружности, на которой лежат все изображения, равен

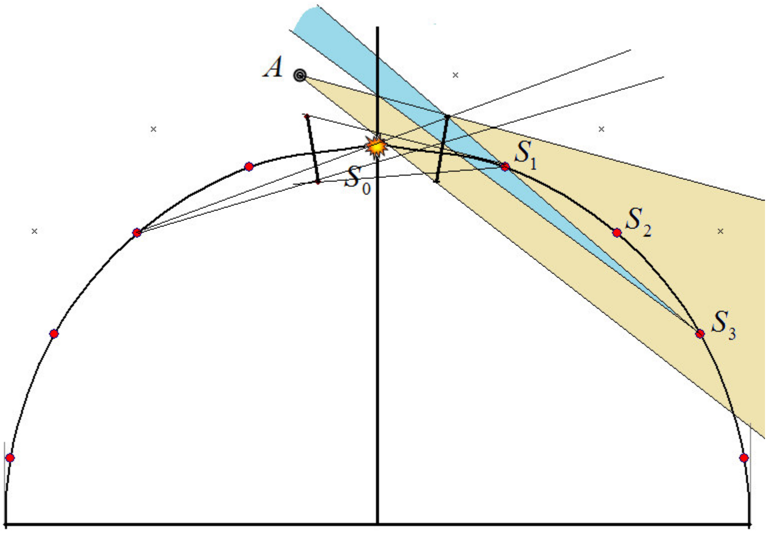
$$R = \frac{a}{\sin\alpha} \approx 57{,}6 см \tag{11}$$

Также нетрудно заметить, что угловое расстояние между соседними изображениями равно $\Delta\varphi = 2\alpha = 20°$. Для того, чтобы записать формулы для координат изображений удобно сместить начало координат в центр окружности. В этой системе координаты изображений описываются простыми формулами

$$\begin{cases} x_k = R\sin k\Delta\varphi \\ y_k = R\cos k\Delta\varphi \end{cases} \quad k = 1,2,...17\,. \qquad (12)$$

Далее можно построить положения всех изображений, положение зеркал и глаза наблюдателя и анализ видимости провести геометрически.

Такое построение показано на рисунке. Опять, рассматривая зеркало, как « окошко» находим, что в область видимости попадают только три изображения (по нумерации формул (12)). Однако, в данном случае далеко лучи отраженные от зеркал не полностью покрывают следующее зеркало. Поэтому необходимо аккуратно построить крайние лучи, которые принимают участие в формировании следующего изображения. Такое построение показывает, что третье изображение не видно с точки расположения глаза. На рисунке выделен пучок лучей, который формирует это изображение – глаз находится вне этого пучка!

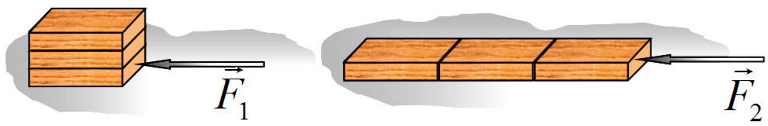


Таким образом, в рассматриваемой ситуации видны только два изображения, координаты которых равны

$$\begin{cases} x_1 = 19{,}7\,см \\ y_1 = 54{,}1\,см \end{cases}, \quad \begin{cases} x_2 = 37{,}0\,см \\ y_1 = 44{,}1\,см \end{cases}. \qquad (13)$$

Задача 2. В память о лесосплаве

2.1 Чтобы сдвинуть бруски необходимо приложить силу превышающую силу трения. В соответствии с законном Кулона-Амонтона сила трения не зависит от площади соприкосновения, а определяется силой нормальной реакции. В обоих случаях сила трения (и равная ей минимальная сила) равна



$$F = \mu N = 3\mu mg\,. \qquad (1)$$

2.2 Между брусками, сложенными стопкой, действуют силы трения, максимальные значения которых равны:

- между верхним и средним

$$F_{тр1} = \mu mg\,, \qquad (2)$$

- между средним и нижним

$$F_{тр2} = 2\mu mg\,, \qquad (3)$$

- между нижним и столом

$$F_{тр3} = 3\mu mg\,. \qquad (4)$$