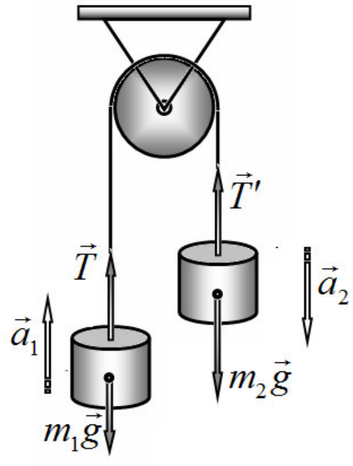
Задача 3. Равноускоренные колебания



Хорошо известна задача о движении грузов на нити, переброшенной через блок.
Уравнения второго закона Ньютона для каждого из грузов (с учетом равенства модулей ускорений и равенства модулей сил натяжения нитей) имеют вид

$$\begin{aligned} m_2 a &= m_2 g - T \\ m_1 a &= T - m_1 g \end{aligned} \qquad (1)$$

Из этой системы следует формула для ускорения грузов (положительное направление ускорения указано на рисунке)

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g\,. \qquad (2)$$

Способ решения 1. Чисто кинематический.
Последовательно рассмотрим все этапы движения системы, описанной в условии задачи.

При движении вниз между уровнями ***A*** и ***B*** ускорение грузов в соответствии с полученной формулой (2) равно

$$a_1 = \frac{m_2 + m_3 - m_1}{m_2 + m_3 + m_1} g = \frac{0{,}99 + 0{,}02 - 1{,}00}{0{,}99 + 0{,}02 + 1{,}00} \cdot 10 \frac{м}{с^2} \approx 5{,}0 \frac{см}{с^2} \qquad (3)$$

Когда правый груз пройдет расстояние h, его скорость находится из формулы

$$h = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2ah} \qquad (4)$$

Если малый груз снят, то ускорение системы равно

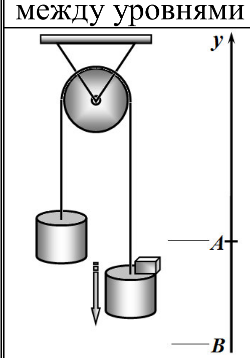
$$a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g = \frac{0{,}99 - 1{,}00}{0{,}99 + 1{,}00} \cdot 10 \frac{м}{с^2} \approx -5{,}0 \frac{см}{с^2} \qquad (5)$$

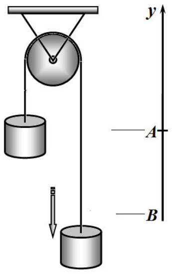
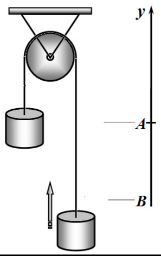
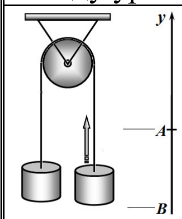
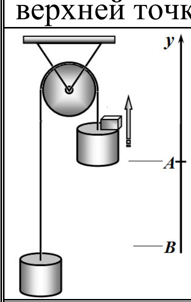
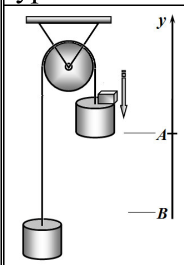
Дальнейшее движение будет происходить с отрицательным ускорением, путь, который пройдет до остановки, и минимальная координата находится по формулам

$$\Delta y = \frac{v_1^2}{2a_2} \quad \Rightarrow \quad y_{\min} = -h - \frac{v_1^2}{2a_2} \qquad (6)$$

Остальные формулы для расчета характерных точек находятся аналогично. Для удобства численных расчетов все формулы сведены в единую таблицу. В таблице модуль ускорения обозначен $a = 5{,}0 \frac{см}{с^2}$, в строках скоростей и ускорений приведены их проекции на вертикальную ось y.

Таблица 1. Кинематический расчет закона движения

	Параметр	Формула
Движение вниз между уровнями ***AB***	Начальная скорость	v_0
	Ускорение	$a_1 = -a$
	Конечная скорость	$v_1 = -\sqrt{v_0^2 + 2ah}$
	Конечная координата	$-h$
	Время движения	$\Delta t = \left\lvert \frac{v_1 - v_0}{a} \right\rvert$

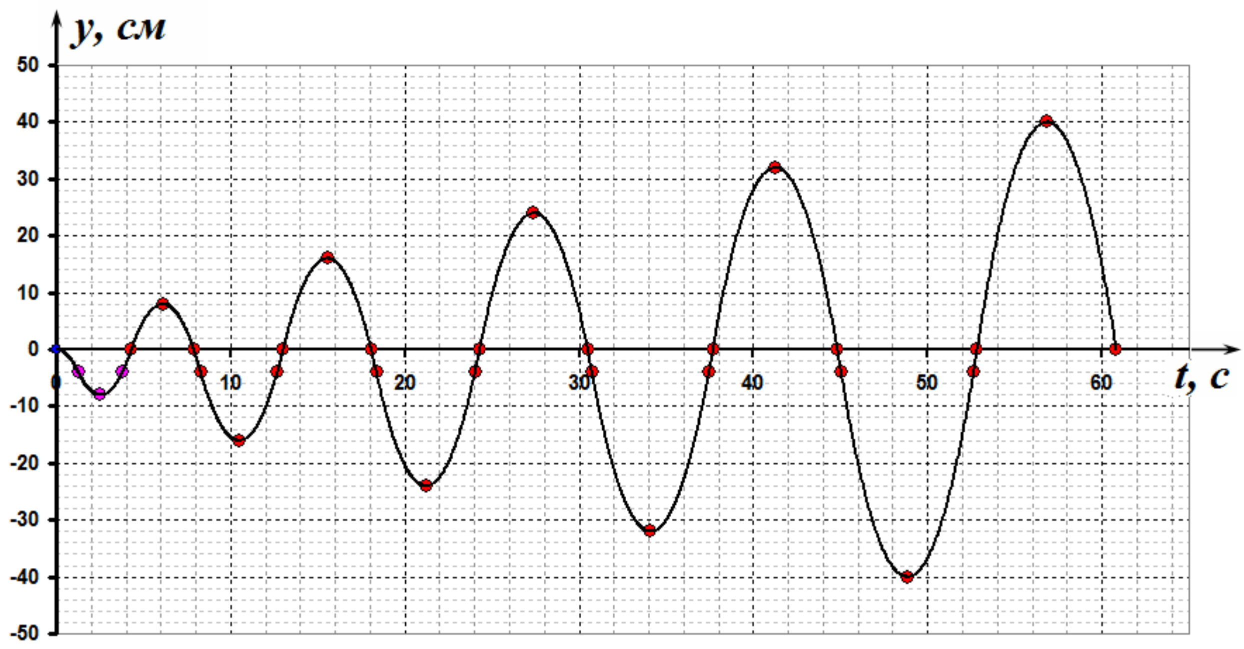
<table>
<tr><td>Движение вниз от уровня B до нижней точки</td><td>Начальная скорость</td><td>v_1</td></tr>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>Ускорение</td><td>$a_2 = a$</td></tr>
<tr><td>Конечная скорость</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Конечная координата</td><td>$y_{\min} = -h - \dfrac{v_1^2}{2a}$</td></tr>
<tr><td>Время движения</td><td>$\Delta t = \left|\dfrac{v_1}{a}\right|$</td></tr>
<tr><td>Движение вверх от нижней точки до уровня B</td><td>Начальная скорость</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>ускорение</td><td>$a_2 = a$</td></tr>
<tr><td>Конечная координата</td><td>$-h$</td></tr>
<tr><td>Конечная скорость</td><td>$-v_1$</td></tr>
<tr><td>Время движения</td><td>$\Delta t = \left|\dfrac{v_1}{a_2}\right|$</td></tr>
<tr><td>Движение вверх между уровнями AB</td><td>Начальная скорость</td><td>$-v_1$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>Ускорение</td><td>$a_2 = a$</td></tr>
<tr><td>Конечная координата</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Конечная скорость</td><td>$v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2ah}$</td></tr>
<tr><td>Время движения</td><td>$\Delta t = \left|\dfrac{v_2 - v_1}{a}\right|$</td></tr>
<tr><td>Движение от вверх от уровня A до верхней точки</td><td>Начальная скорость</td><td>v_2</td></tr>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>Ускорение</td><td>$a_2 = -a$</td></tr>
<tr><td>Конечная скорость</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Конечная координата</td><td>$y_{\max} = \dfrac{v_2^2}{2a}$</td></tr>
<tr><td>Время движения</td><td>$\Delta t = \left|\dfrac{v_2}{a}\right|$</td></tr>
<tr><td>Движение вниз от верхней точки до уровня A</td><td>Начальная скорость</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="4">
</td><td>Ускорение</td><td>$a_2 = -a$</td></tr>
<tr><td>Конечная скорость</td><td>$-v_2$</td></tr>
<tr><td>Конечная координата</td><td>0</td></tr>
<tr><td>Время движения</td><td>$\Delta t = \left|\dfrac{v_2}{a}\right|$</td></tr>
</table>

Результаты необходимых численных расчетов приведены в таблице 2. (координаты в см, время в с)

Таблица 2. Расчет закона движения

	$n=1$		$n=2$		$n=3$		$n=4$		$n=5$	
	y	t	y	t	y	t	y	t	y	t
y_A	0,0	0,00	0,0	7,90	0,0	18,08	0,0	30,50	0,0	44,83
y_B	-4,0	1,26	-4,0	8,30	-4,0	18,38	-4,0	30,75	-4,0	45,05
$y_{\min}$	**-8,0**	**2,53**	**-16,0**	**10,49**	**-24,0**	**21,21**	**-32,0**	**34,10**	**-40,0**	**48,84**
y_B	-4,0	3,79	-4,0	12,68	-4,0	24,03	-4,0	37,44	-4,0	52,64
y_A	0,0	4,32	0,0	13,02	0,0	24,30	0,0	37,67	0,0	52,84
$y_{\max}$	**8,0**	**6,11**	**16,0**	**15,55**	**24,0**	**27,40**	**32,0**	**41,25**	**40,0**	**56,84**

График рассчитанной зависимости показан на рисунке.



Проведенные расчеты показывают, зависимости минимального и максимального смещения от номера цикла имеют простой вид

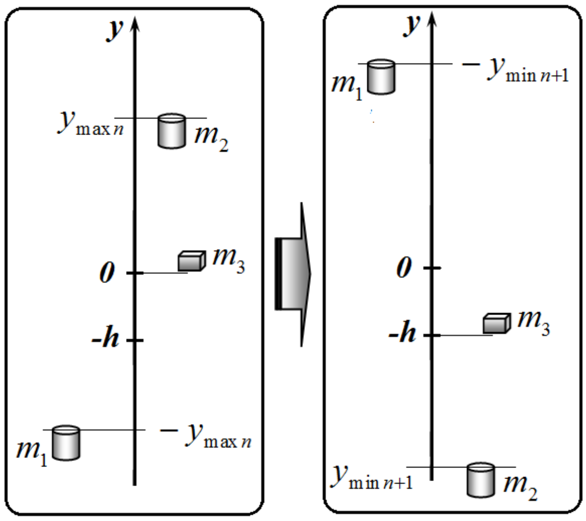
$$
\begin{aligned}
y_{\min} &= -8{,}0n \ (см) \\
y_{\min} &= +8{,}0n \ (см)
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

Способ решения 2. «Энергетически-кинематический»

Полученные соотношения слишком просты, чтобы быть случайными – поэтому возможен второй, более «быстрый» способ решения, основанный не только на кинематических формулах. Заметим, что система получает дополнительную энергию при движении вниз с грузом m_3.

Рассмотрим изменение энергии системы между крайними точками, в которых скорости грузов равны нулю.

а) Опускание: груз m_2 движется от крайнего верхнего положения $y_{\max n}$ до следующего крайнего нижнего положения $y_{\min n+1}$. На этом этапе груз m_3 опустился на высоту h (от уровня ***A*** до уровня ***B***). Начальные и конечные положения всех грузов показаны на рисунке. Поэтому уравнение закона сохранения энергии имеет вид

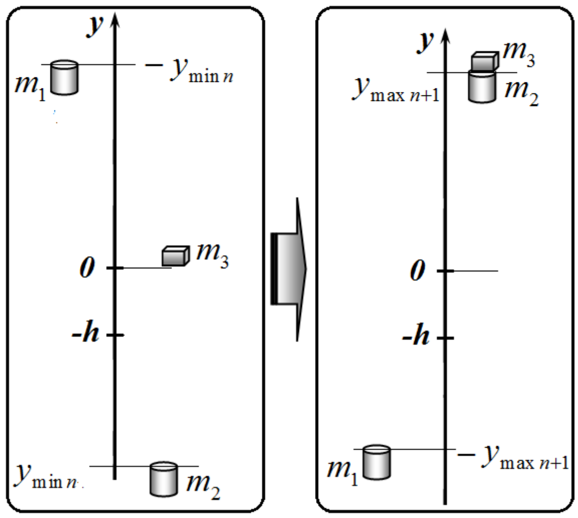


$$m_2 y_{\max n} - m_1 y_{\max n} = m_2 y_{\min n+1} - m_1 y_{\min n+1} - m_3 h,$$

из которого следует (с учетом численных значений масс грузов):

$$y_{\min n+1} = y_{\max n} + \frac{m_3}{m_2 - m_1} h = y_{\max n} - 2h.$$

Б) Подъем: груз m_2 поднимается от крайнего нижнего положения $y_{\min n}$ до следующего крайнего верхнего положения $y_{\max n+1}$. Учитывая, что груз m_3 кладут на уровне ***A***, изобразим начальные и конечные положения грузов и запишем уравнение закона сохранения энергии в этом случае



$$m_2 y_{\min n} - m_2 y_{\min n} = (m_2 + m_3) y_{\max n+1} - m_1 y_{\max n+1},$$

из которого находим (опять с учетом масс грузов)

$$y_{\max n+1} = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_3 - m_1} y_{\min n} = -y_{\min n}.$$

Полученные формулы сразу приводят к полученным ранее формулам (7). Далее традиционным способом находим ускорения грузов при движении с грузом m_3 ($a_1 = -a = -5{,}0 \frac{см}{с^2}$) и без него ($a_2 = +a = 5{,}0 \frac{см}{с^2}$).

Далее отмечаем, что движение без дополнительного груза m_3 происходит на участках $-h \to y_{\min} \to -h \to 0$, а движение с дополнительным грузом на участках $0 \to y_{\max} \to 0 \to -h$. Так как модули ускорений на этих участках одинаковы и максимальные смещения также одинаковы, то графики законов движения (параболы) на этих участках тоже одинаковы, только перевернуты. Эти рассуждения позволяют заметно сократить расчеты, начиная каждый цикл с момента прохождения вниз уровня ***B***. Сначала следует «подойти» к началу первого цикла: рассчитать время первого прохождения точки $y = -h$ по формуле $t_0 = \sqrt{\frac{2h}{a}} = 4{,}0 с$. После этого рассчитать максимальное смещение груза в цикле по формуле $Y = 8n(см)$, а также три интервала времени прохождения соответствующих отрезков (они показаны на рисунке) по формулам

$$\Delta t_1 = \sqrt{\frac{Y-h}{2a}} = \sqrt{8n-4} = 2\sqrt{2n-1}$$

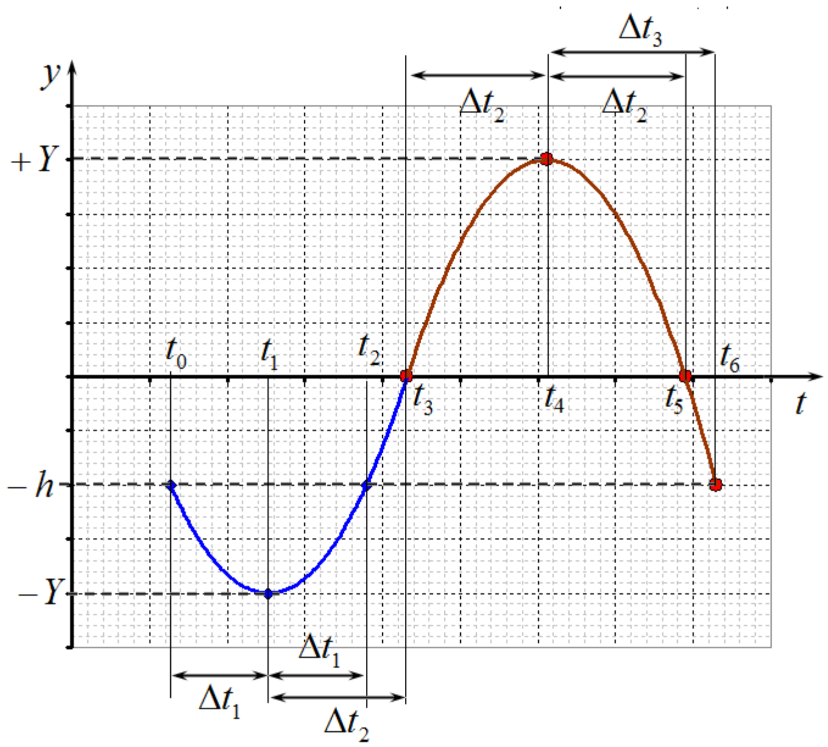
$$\Delta t_2 = \sqrt{\frac{Y}{2a}} = \sqrt{8n} = 2\sqrt{2n}$$

$$\Delta t_1 = \sqrt{\frac{Y+h}{2a}} = \sqrt{8n+4} = 2\sqrt{2n+1}$$

После чего вычисления времен прохождения каждой характерной точки рассчитываются простым суммированием (для удобства схема расчета сведена в таблицу 3.

Таблица 3. Схема расчета времен характерных точек.

$n =$	
	$Y = 8n =$
	$\Delta t_1 = 2\sqrt{2n-1}$
	$\Delta t_2 = 2\sqrt{2n}$
	$\Delta t_3 = 2\sqrt{2n+1}$
y	t
-4	$t_0 =$
$-Y$	$t_1 = t_0 + \Delta t_1$
-4	$t_2 = t_1 + \Delta t_1$
0	$t_3 = t_1 + \Delta t_2$
$+Y$	$t_4 = t_3 + \Delta t_2$
0	$t_5 = t_4 + \Delta t_2$
-4	$t_6 = t_4 + \Delta t_3$



Очевидно, что результаты расчетов по этой схеме приводят к тем же результатам.