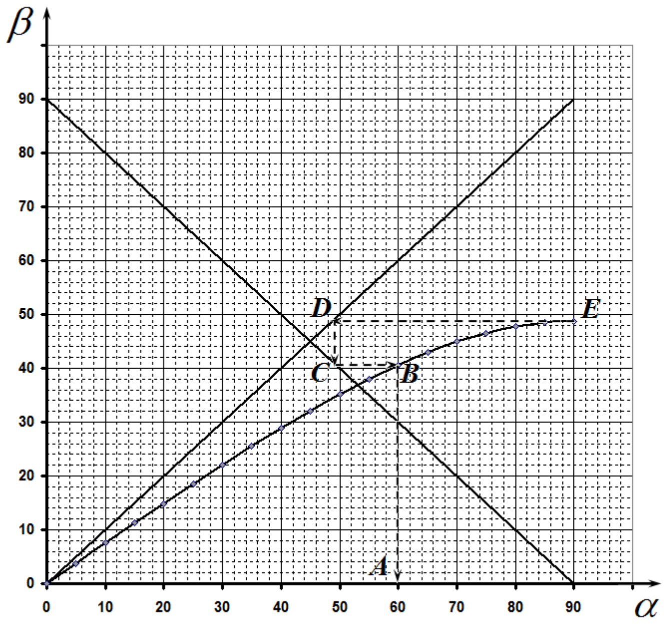
- от точки A ($\alpha = 80°$) проводим вертикальную прямую до пересечения с графиком функции $\beta = f(\alpha)$ (точка B), ее ордината равна углу β (по графику находим $\beta \approx 48°$);
- от точки B проводим горизонтальную прямую до пресечения с прямой $\beta = 90° - \alpha$, (точка C), ее абсцисса равна углу γ (по графику находим $\gamma \approx 42°$);
- от точки C проводим вертикальную прямую до пересечения с прямой $\beta = \alpha$ (точка D), ее ордината также равна γ;
- наконец, от точки D проводим горизонтальную прямую до пересечения с заданной функцией $\beta = f(\alpha)$ (точка E), ее абсцисса и есть искомый угол $\delta = f^{-1}(\gamma)$; здесь f^{-1} - обозначена обратная функция. По графику находим $\delta \approx 65°$.



1.3.2 Аналогичная процедура для начального значения $\alpha = 62°$ приводит к значению $\delta \approx 80°$.

1.3.3 Из графика зависимости $\beta = f(\alpha)$ видно, что максимальное значение угла преломления равно $\beta_{\max} = 49°$. Для нахождения соответствующего значения угла падения α необходимо от «конечной точки E (координатами $(90°, 49°)$) проделать обратный путь $EDCBA$, который приводит к значению
$\alpha_{\min} \approx 60°$**.** При меньших углах падения решения задачи не существует, это означает, что на второй грани луч полностью отразится. Таким образом, диапазон углов, при которых луч выйдет через вторую грань $60° < \alpha < 90°$.

Задание 2. Средние скорости.

2.1.1. Модуль средней скорости: $\langle \upsilon \rangle = \dfrac{\Delta r}{t}$. Когда точка проходит через первоначальное положение, $\Delta r = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \upsilon \rangle = 0$. Период вращения – это промежуток времени между двумя последовательными обращениями в ноль средней скорости. На рисунке это $T = 0{,}5\,\text{с}$.

2.1.2. Рассмотрим поворот колеса на угол $\varphi = \frac{2\pi}{T}t$.

Модуль перемещения за это время (см. рисунок 4):

$$\Delta r = 2R\sin\frac{\varphi}{2} \quad \Rightarrow \quad \Delta r = 2R\sin\frac{\pi t}{T} \quad \Rightarrow$$

$$\langle \upsilon \rangle = 2\frac{R}{t}\sin\frac{\pi t}{T}. \qquad (1)$$

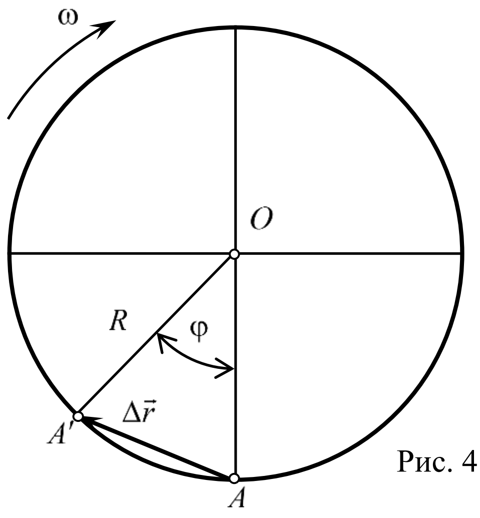


Рис. 4

2.1.3. Умножим числитель и знаменатель выражения для $\langle \upsilon \rangle$ на $\frac{\pi}{T}$: $\langle \upsilon \rangle = \dfrac{\frac{\pi}{T}2R\sin\frac{\pi t}{T}}{\frac{\pi t}{T}}$. При $t \to 0$ получим: $\langle \upsilon \rangle = \frac{2\pi R}{T} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{\langle \upsilon \rangle T}{2\pi}$ Из графика при $t = 0$ $\langle \upsilon \rangle = 1{,}25\frac{\text{м}}{\text{с}} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{1{,}25 \cdot 0{,}5}{2\pi} = 0{,}1\,\text{м}$.

2.2.1. Минимумы на графике соответствуют моментам касания точкой поверхности земли. Промежуток времени между двумя последовательными касаниями равен периоду вращения колеса. Из графика: $T = 0{,}4\,\text{с}$.

2.2.2. Если колесо не проскальзывает на дороге, модуль линейной скорости вращения колеса равен модулю поступательного движения колеса, поэтому $u = \frac{2\pi R}{T} = 1{,}6\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

2.2.3. Положение точки на ободе колеса может быть определено относительно неподвижной системы отсчета, связанной с поверхностью, и относительно колеса, которое является движущейся системой отсчета. Перемещения относительно этих систем отсчета связаны законом сложения перемещений:

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}_0 + \Delta\vec{r}\,'.$$

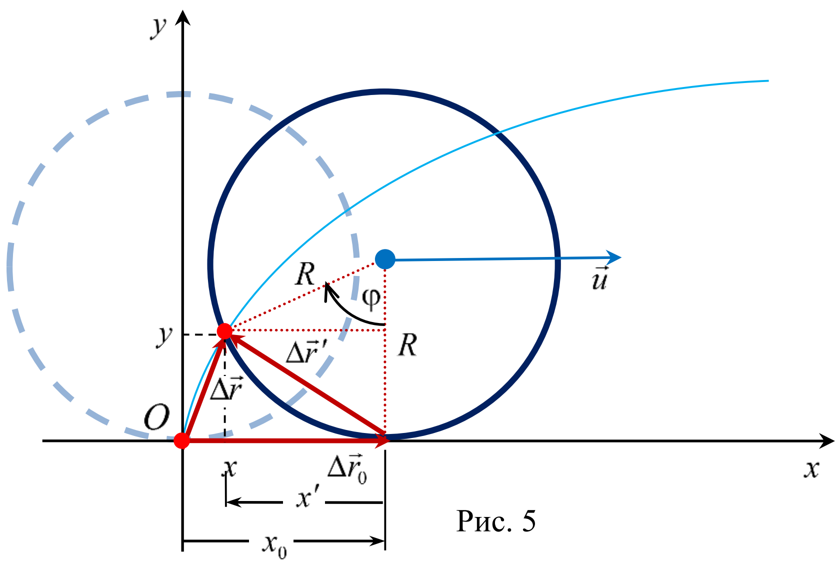


Рис. 5

Здесь $\Delta\vec{r}$ – перемещение точки относительно неподвижной поверхности; $\Delta\vec{r}\,'$ – перемещение точки относительно колеса; $\Delta\vec{r}_0$ – перемещение колеса относительно поверхности (см. рис. 5).

В проекциях на оси координат (см. рис. 5):

$$x = x_0 - x', \quad x_0 = ut, \quad x' = R\sin\varphi; \quad y = y', \quad y' = R - R\cos\varphi.$$

Угол $\varphi = \omega t$, где $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{u}{R}$ – угловая скорость вращения колеса. Окончательно:

$$\begin{cases} x = ut - R\sin\dfrac{ut}{R} \\ y = R\left(1-\cos\dfrac{ut}{R}\right), \end{cases} \quad \Delta r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad \Delta r = \sqrt{\left(ut - R\sin\frac{ut}{R}\right)^2 + \left(R\left(1-\cos\frac{ut}{R}\right)\right)^2} \quad \Rightarrow$$

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta r}{t} = \frac{R}{t}\sqrt{\frac{ut}{R}\left(\frac{ut}{R} - 2\sin\frac{ut}{R}\right) + 2\left(1-\cos\frac{ut}{R}\right)}. \qquad (2)$$

График этой функции приведен на рисунке 2 в условии.

2.3.1. Отсчитаем на рисунке второй минимум на графике, так как время этого минимума $t_2 = 1{,}5\,\text{с}$ можно прочитать с достаточно высокой точностью. За время t_2 колесо совершило 2 полных оборота и прошло путь $s = 2\cdot 2\pi R = 4\pi R$. Это расстояние равно $\frac{at_2^2}{2}$.

В результате: $4\pi R = \dfrac{at_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{8\pi R}{t_2^2} = \dfrac{8\pi\cdot 0{,}1}{1{,}5^2} = 1{,}12\,\dfrac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

2.3.2. В формуле (2) для равномерного движения колеса произведение ut – это путь, пройденный колесом при равномерном движении. В данном случае его необходимо заменить на $\dfrac{at^2}{2}$ – путь при равноускоренном движении из состояния покоя. В результате:

$$\langle v \rangle = \frac{\Delta r}{t} = \frac{R}{t}\sqrt{\frac{at^2}{2R}\left(\frac{at^2}{2R} - 2\sin\frac{at^2}{2R}\right) + 2\left(1-\cos\frac{at^2}{2R}\right)}. \qquad (3)$$

График этой функции приведен на рисунке 3 в условии.

Задание 3. Теплоемкость процесса.

Часть 1. Политропические процессы.

3.1.1 Теплоемкость системы определяется как отношение количества теплоты, полученной системой к изменению ее температуры

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T}. \qquad (1)$$

Используя уравнение первого закона термодинамики для идеального газа

$$\delta Q = \Delta U + \delta A = C_V \Delta T + P\Delta V, \qquad (2)$$

получим требуемое в условии соотношение

$$C = \frac{\delta Q}{\Delta T} = C_V + P\frac{\Delta V}{\Delta T}. \qquad (3)$$

3.1.2 Запишем уравнение процесса в виде

$$PV^n = B, \qquad (4)$$

где B - некоторая постоянная. С помощью уравнения состояния идеального газа

$$PV = RT \qquad (5)$$

Выразим явную зависимость температуры газа от его объема

$$T = \frac{B}{R}V^{1-n}. \qquad (6)$$

Из вида этой зависимости с помощью математической подсказки находим