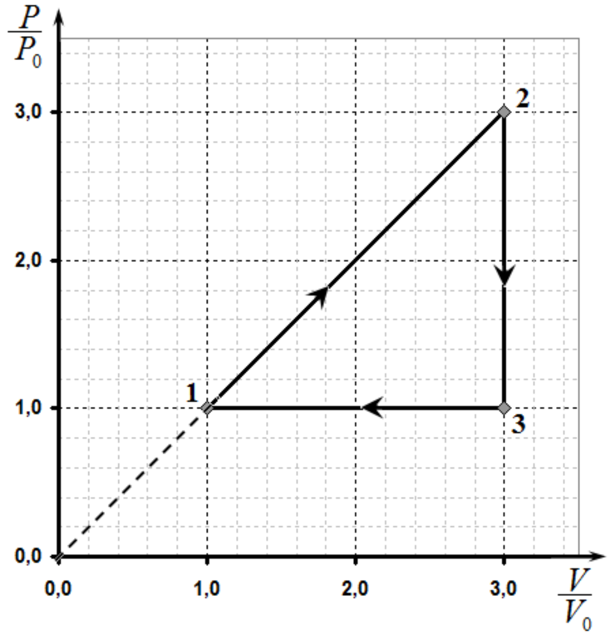
Это позволяет построить график процесса в требуемых координатах $\left(\frac{P}{P_0}, \frac{V}{V_0}\right)$ (см. рисунок).



3.2.2 Работа, совершенная за цикл численно равна площади цикла в координатах (P,V). Поэтому в данном случае

$$A_\Sigma = \frac{1}{2}(P_2 - P_3)(V_3 - V_1) = 2P_0V_0 \qquad (14)$$

Используя уравнения состояния, последнее выражение можно записать в виде, который дает возможность найти численное значение работы

$$A = 2P_0V_0 = 2RT_0 = 5{,}0\,кДж \qquad (15)$$

3.2.3 Очевидно, что в данном циклическом процессе газ получает теплоту только на участке 1-2. Согласно первому закону термодинамики это количество теплоты рассчитывается по формуле

$$Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12}. \qquad (16)$$

Здесь изменение внутренней энергии

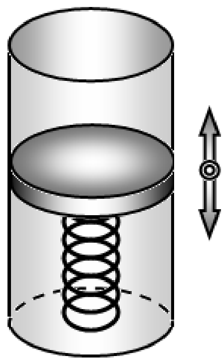
$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}R(T_3 - T_1) = 12RT_0 = 12P_0V_0; \qquad (17)$$

А работа на этом участке равна площади трапеции под отрезком прямой 1-2:

$$A_{12} = \frac{P_1 + P_3}{2}(V_3 - V_1) = 4P_0V_0\ . \qquad (18)$$

Таким образом, КПД цикла равен

$$\eta = \frac{A_\Sigma}{Q_{12}} = \frac{2P_0V_0}{12P_0V_0 + 4P_0V_0} = \frac{1}{8} = 12{,}5\%. \qquad (19)$$



3.2.4 Процесс, в котором давление возрастает пропорционально объему можно реализовать в сосуде с подвижным поршнем, если поршень прикреплен ко дну сосуда пружиной. Если пренебречь длиной пружины в недеформированном состоянии и внешним давлением, то процесс расширения газа будет описываться уравнением (12).

11 класс

Задание 1. Разминка. Как будет лучше?

1.1. По какой бы траектории фермер не двигался, часть пути ему будет необходимо преодолеть по полю. Достичь какой-либо точки *D* на поле из точки *A* быстрее всего будет, конечно же, по прямой, так как в этом случае длина пути минимальна. Далее, если в какой-то момент времени фермер оказался на проселочной дороге, то дальше ему, очевидно, выгоднее идти домой в точку *C* именно по ней, так как скорость движения фермера по дороге выше, чем по полю. Таким образом, оптимальная траектория фермера может быть только отрезком AC по полю или состоять из отрезка AE до некоторой точки E на дороге и отрезка EC по дороге (рисунок 1). Обе описанных траектории можно свести к движению по ломаной AEC, точка E которой находится на дороге на некотором расстоянии x от точки B. В предельном случае движения только по полю $x_{max} = BC = 2{,}0$ км.

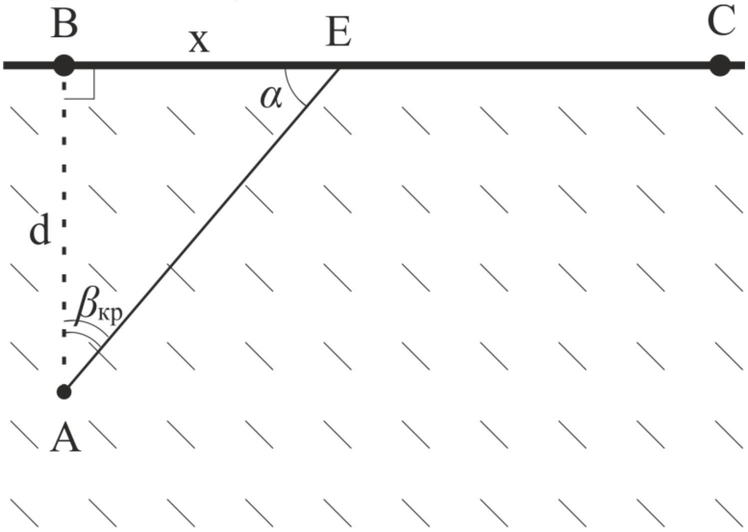


Рисунок 1

Определим, при каком расстоянии x время движения будет минимально. Для этого напишем выражение для этого времени:

$$t = \frac{AE}{v_1} + \frac{EC}{v_2} = \frac{\sqrt{d^2+x^2}}{v_1} + \frac{l-x}{v_2} \quad (1)$$

Здесь мы ввели обозначения $d = AB = 600$ м, $l = BC = 2{,}0$ км. Для определения минимального времени посчитаем производную $t'(x)$ и приравняем ее к нулю:

$$t'(x) = \frac{x_0}{v_1\sqrt{d^2+x_0{}^2}} - \frac{1}{v_2} = 0$$

Отсюда:

$$x_0 = \frac{v_1 d}{\sqrt{v_2{}^2 - v_1{}^2}} = 612 \text{ м} \quad (2)$$

Математически равенство нулю не гарантирует то, что полученный результат является точкой минимума функции, а лишь указывает на наличие экстремума. Впрочем, минимум функции $t(x)$ должен явно существовать на участке $x > 0$ из физических соображений, а формула (2) дает единственную возможную ситуацию расположения такого минимума.

Отметим, что этот же результат можно было получить, не используя аппарат вычисления производной. Для этого выражение (1) можно преобразовать к виду квадратного уравнения относительно переменной x. Такое уравнение не должно иметь корней для случая $t < t_{min}$, так как «быстрее минимального времени» до дома добраться нельзя. Пограничный случай $t = t_{min}$ тогда будет соответствовать ситуации, когда дискриминант описанного квадратного уравнения равен нулю. Выполнение этого требования путем математических преобразований приводит к тому же результату (2).

Таким образом, получаем ответ. Для наиболее быстрого пути домой фермеру необходимо двигаться вначале по полю по прямой к точке E, расположенной на дороге на расстоянии $x_0 = 612$ м от точки B, а затем по проселочной дороге до дома в точке C. Другими словами, фермер должен двигаться по полю под углом $\alpha = \mathrm{arctg}\frac{d}{x_0} = 44{,}4°$ к дороге, а дальше продолжить движение к дому по ней.

Альтернативный способ: Согласно принципу Ферма в оптике, свет движется из начальной точки в конечную по пути, соответствующем минимальному времени движения. Данный принцип можно применить для решения данной задачи. Предположим, что дорога BC – это граница раздела двух сред, в которых свет распространяется со скоростями v_1 и v_2 соответственно. Тогда показатели преломления этих сред $n_1 = \frac{c}{v_1}$ и $n_2 = \frac{c}{v_2}$. Мы будем пытаться определить траекторию луча, движущегося из точки A в точку C, которая, согласно принципу Ферма, обеспечит минимальное время движения. Логично предполагая, что фермер хотя бы в самом конце пути к дому будет двигаться по проселочной дороге, получаем, что луч света часть пути должен распространяться вдоль границы двух сред. Такая ситуация реализуется при критическом угле падения на границу сред, при превышении которого в оптике происходит явление полного внутреннего отражения. Получаем, что для достижения минимального времени фермер, как и луч света, должен двигаться под углом $\beta_{кр}$ к прямой AB (нормали к дороге), который можно рассчитать, используя выражение:

$$\sin\beta_{кр} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{5}{7}$$

Отсюда $\beta_{кр} = 45{,}6°$ – угол между направлением движения фермера и нормалью или $\alpha = 44{,}4°$ – угол между направлением движения фермера по полю и дорогой.

Как видно, результаты альтернативных способов решения совпадают.

1.2. Максимальный КПД тепловой машины достигается при осуществлении рабочим телом цикла Карно. Для совершения машиной максимально возможной работы будем считать, что процесс состоит именно из таких циклов. При этом рабочее тело на каждом цикле будет забирать теплоту у нагревателя и отдавать холодильнику, то есть температура камней будет изменяться. Процесс с совершением работы уже не сможет происходить, когда температуры камней сравняются.

Пусть после очередного цикла температура горячего камня равна $T_{гор}$, а холодного – $T_{хол}$. В течение одного последующего цикла температура горячего камня изменится на $\Delta T_{гор}$, передав рабочему телу теплоту $Q_{пол} = -C\Delta T_{гор}$. (Знак «минус» учитывает тот факт, что $\Delta T_{гор} < 0$ – камень охлаждается). Температура же холодного камня изменится на $\Delta T_{хол}$, получив от рабочего тела теплоту $Q_{отд} = C\Delta T_{хол}$. КПД данного цикла такой тепловой машины можно рассчитать следующим образом:

$$\eta = \frac{A}{Q_{пол}} = \frac{Q_{пол} - Q_{отд}}{Q_{пол}} = 1 - \frac{Q_{отд}}{Q_{пол}} = 1 + \frac{\Delta T_{хол}}{\Delta T_{гор}}$$

С другой стороны, если процесс осуществляется по циклу Карно:

$$\eta = 1 - \frac{T_{хол}}{T_{гор}}$$

где температуры выражены по шкале Кельвина. Сравнивая два выражения для КПД, получаем:

$$\frac{\Delta T_{хол}}{T_{хол}} = -\frac{\Delta T_{гор}}{T_{гор}}$$

Согласно примечанию в условии задачи такая связь температур говорит о том, что в ходе всего процесса будет сохраняться их произведение: $T_{гор} \cdot T_{хол} = const$. Если обозначить конечную температуру обоих камней $T_к$, зная начальные их температуры, можно записать:

$$T_1 T_2 = T_к T_к = T_к{}^2$$

Отсюда $T_к = \sqrt{T_1 T_2} = 339{,}8\ К = \ 66{,}8\ °C$. Пренебрегая теплоемкостью рабочего тела – газа по сравнению с теплоемкостью камней, то есть пренебрегая изменением внутренней энергии газа за весь процесс, можем записать второе начало термодинамики и определить искомую максимально возможную работу:

$$A_{max} = Q_{пол} - Q_{отд} = C(T_1 - T_к) - C(T_к - T_2) = C(T_1 + T_2 - 2T_к) = 52{,}3\ кДж$$

1.3. В случае А) очевидным является тот факт, что одним зеркалом необходимо отразить сразу оба луча, так как, распространяясь прямолинейно, ни один из них в щель не попадает. При построении отражения в плоском зеркале популярным является метод изображений, когда продолжения лучей мысленно по прямой продолжаются за зеркало, а потом, для построения их настоящего хода, симметрично геометрически отражаются от зеркальной плоскости. Можно заметить, что при таком построении расстояние между какими-либо двумя точками лучей не изменяются, отражаются оба луча в зеркале или нет. Таким образом, для того чтобы оба луча «сошлись» в щели, в точку *A* необходимо отразить ту точку, где лучи и так сходятся на близкое (а лучше нулевое) расстояние – то есть точку их пересечения *C* (рисунок 2).

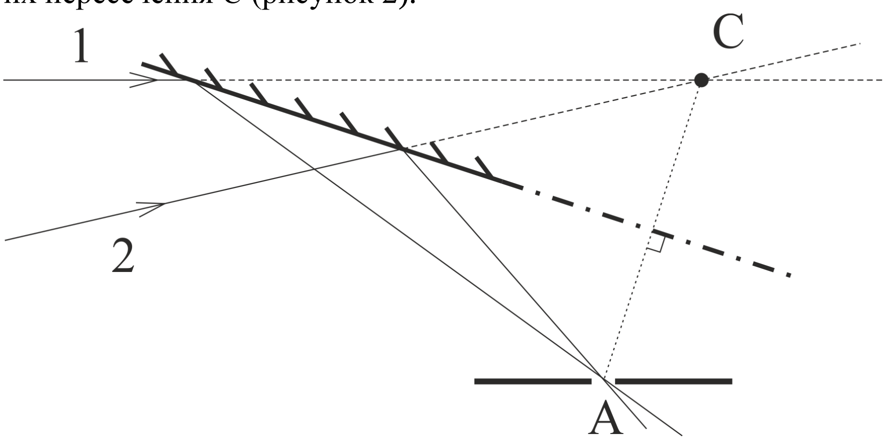


Рисунок 2

Для того чтобы точка *A* была изображением точки *C* зеркало должно находится ровно посередине между указанными точками, а его плоскость должна быть перпендикулярна *AC*. Получив плоскость расположения зеркала, достаточно лишь изобразить его такого размера, чтобы лучи 1 и 2 попадали на поверхность и отражались. Теперь лучи пересекутся прямо в точке *A*, то есть оба пройдут через щель.

В случае Б) можно заметить, что диапазон *DE*, на котором лучи идут достаточно близко друг к другу, чтобы одновременно пройти через щель, меньше расстояния *AB* между щелями (рисунок 4). Так как при отражениях в плоских зеркалах расстояния между точками не изменяется, получаем, что, отражая одновременно два луча, мы никаким образом не сможем их направить через обе щели.

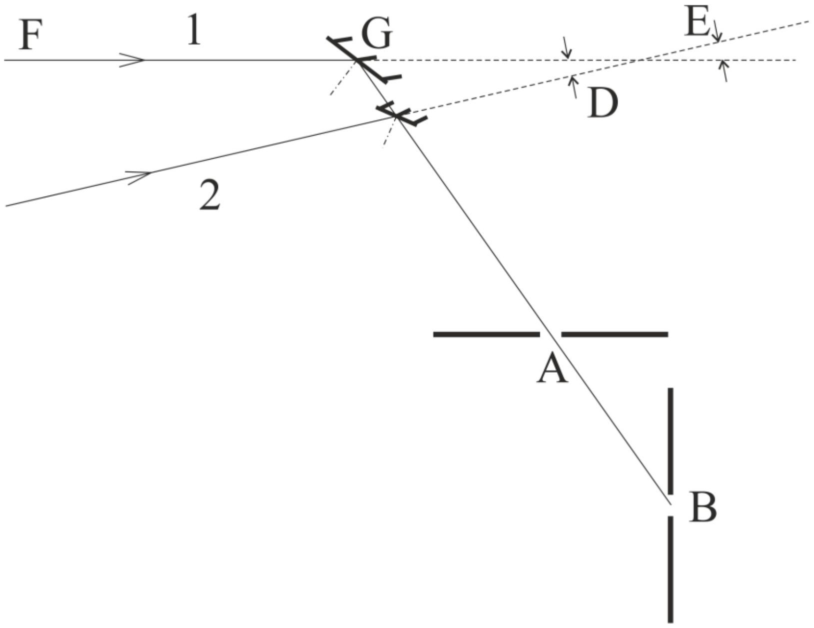


Рисунок 3

С другой стороны, никто не запрещает отражать каждый луч своим зеркалом по отдельности. Действительно, для того чтобы любой луч прошел через обе щели, его достаточно направить по прямой *AB*. Для этого построим угол *FGB*, как показано на рисунке 3 и найдем его биссектрису. Маленькое зеркало должно располагаться в точке *G* перпендикулярно полученной биссектрисе. Аналогичное построение можно сделать и для второго луча. Далее используя небольшой, но все же не нулевой размер щели, необходимо немного сместить одно или оба зеркала так, чтобы каждое отражало только один луч и не мешало прохождению второго (на рисунке 4 не отображено). Таким образом, оба луча примерно параллельно друг другу пройдут через обе щели *A* и *B*.

Ироничный момент задачи состоит в том, что в пункте А) необходимо взять достаточно большое зеркало, чтобы на него попали сразу оба луча. В пункте Б) наоборот, стоит выбрать зеркала поменьше, чтобы они отразили только один луч и не мешали ничему остальному.

Задание 2. «Made in Chine».

Напряжение на клеммах *U*, рассчитанное Федей по формулам, при высокой точности расчетов будет отличным от истинного по той причине, что амперметр также обладает некоторым сопротивлением R_a. В случае подключения амперметра в точке *A* цепи Федя будет рассчитывать напряжение по формуле:

$$U^A = I_a^A \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Где I_a^A – сила тока через амперметр в случае *A*. В то же время «настоящее» напряжение на клеммах равно:

$$U^{real} = I_a^A \left(R_a + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)$$

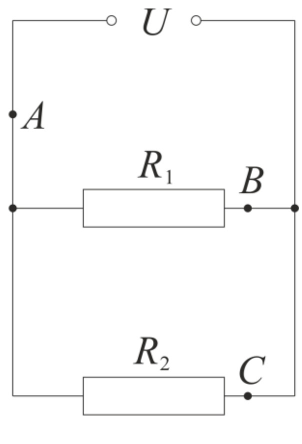


Рисунок 2

В случае подключения амперметра в точке *B* эти напряжения будут равны:

$$U^B = I_a^B R_1 \qquad U^{real} = I_a^B (R_1 + R_a)$$

В случае точки *C*: