$$U^C = I_a^C R_2 \qquad U^{real} = I_a^C (R_2 + R_a)$$

Отличия напряжения, рассчитанного Федей от истинного в каждом случае равно:

$$\Delta U^A = I_a^A R_a = R_a \frac{U^{real}}{R_a + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = U^{real} R_a \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_a + R_2 R_a + R_1 R_2}$$

$$\Delta U^B = I_a^B R_a = U^{real} R_a \frac{1}{R_1 + R_a}$$

$$\Delta U^C = I_a^C R_a = U^{real} R_a \frac{1}{R_2 + R_a}$$

Все выражения записаны через сопротивления и напряжение U^{real}, так как эти величины одинаковы для всех трех подключений A, B и C. Можно отметить, что случаи B и C отличаются лишь заменой R_1 на R_2, то есть результаты всех вычислений для одного из них будет легко перенести на другой. Поэтому, прежде всего, сравним погрешности Фединых расчетов в случаях A и B.

Наиболее точный результат даст то положение амперметра в цепи, для которого соответствующее ΔU будет меньше. Для того, чтобы сравнить ситуации A и B вычтем одно отклонение ΔU из другого:

$$\Delta U^A - \Delta U^B = U^{real} R_a \left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_a + R_2 R_a + R_1 R_2} - \frac{1}{R_1 + R_a} \right) =$$

$$= U^{real} R_a \frac{{R_1}^2 + R_1 R_a + R_1 R_2 + R_2 R_a - R_1 R_a - R_2 R_a - R_1 R_2}{(R_1 R_a + R_2 R_a + R_1 R_2)(R_1 + R_a)} =$$

$$= U^{real} R_a \frac{{R_1}^2}{(R_1 R_a + R_2 R_a + R_1 R_2)(R_1 + R_a)} > 0$$

Как видно, разница положительна, то есть $\Delta U^A > \Delta U^B$. Аналогично можно получить $\Delta U^A > \Delta U^C$. Наконец, сравнивая между собой ΔU^B и ΔU^C, замечаем, что они отличаются только знаменателем, причем знаменатель в ΔU^C больше, так как $R_2 > R_1$. Получаем, что минимальное отклонение рассчитанного напряжения от действительного ΔU, то есть «наиболее правильное» измерение, реализуется при подключении амперметра в точке C.

Задание 3. Как разгоняется газ?

Часть 1. В цилиндрической трубе.

1.1 Для определения установившегося ускорения поршней воспользуемся вторым законом Ньютона

$$ma = \Delta P S. \tag{1}$$

Здесь m - масса газа между поршнями, которая находится из уравнения состояния идеального газа

$$PV = \frac{m}{M} RT, \tag{2}$$

которое следует записать для начального состояния газа

$$P_0 S l_0 = \frac{m}{M} R T_0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{P_0 S M}{R T_0} l_0. \tag{3}$$

Тогда из уравнения (1) получим

$$a = \frac{RT}{P_0 l_0 M} \Delta P. \tag{4}$$

1.2 Для расчета зависимости давления газа от начальной координаты $P(x)$ учтем, что разность сил давлений, действующих на малую выделенную порцию газа (толщина которой в начальном состоянии равна Δx) должна обеспечивать ей ускорения, определяемое формулой (4). Так как масса этой порции может быть найдена по формуле, аналогичной формуле (3) $\Delta m = \frac{P_0 SM}{RT}\Delta x$, то искомая разность сил давлений δP может быть найдена из уравнения второго закона Ньютона для этой порции газа:

$$\Delta m a = -\delta P S \tag{5}$$

Используя выражения для массы порции и ее ускорения, получим, что

$$\frac{\delta P}{\Delta x} = -\frac{\Delta P}{l_0}. \tag{6}$$

Из этого выражения следует, что давление изменяется по линейному закону[1], который с учетом граничного условия (при $x = 0$ $P = P_0 + \Delta P$), имеет вид

$$P = P_0 + \Delta P\left(1 - \frac{x}{l_0}\right) \tag{7}$$

1.3 Выразим толщину слоя выделенной порции ускорено движущегося газа через ее относительную деформацию

$$\delta x = (1+\varepsilon)\Delta x \tag{8}$$

Так как на первом этапе установления равновесия мы пренебрегаем теплообменом между слоями, то для каждого из слоев можно применить уравнение адиабатического процесса

$$P_0(\Delta x)^\gamma = P((1+\varepsilon)\Delta x)^\gamma \tag{9}$$

Так как относительные деформации равны, то к этому выражению можно применить приближенную формулу, приведенную в условии задачи, в результате получим

$$P = P_0(1+\varepsilon)^{-\gamma} \approx P_0(1-\gamma\varepsilon). \tag{10}$$

Теперь, применяя найденную зависимость (7), определим зависимость относительной деформации от координаты

$$P = P_0 + \Delta P\left(1 - \frac{x}{l_0}\right) = P_0(1-\gamma\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = -\frac{\Delta P}{\gamma P_0}\left(1 - \frac{x}{l_0}\right). \tag{11}$$

1.4 Так как в использованном приближении эта зависимость линейна, то для вычисления изменения расстояния Δl_1 между поршнями можно использовать среднее значение относительной деформации, поэтому

$$\Delta l_1 = l_0\langle\varepsilon\rangle = -\frac{\Delta P}{2\gamma P_0} l_0. \tag{12}$$

Таким образом, на этом этапе расстояние между поршнями уменьшится, т.е. газ сожмется.

1.5 Теперь температура каждого выделенного слоя может быть найдена из уравнения Клапейрона $\frac{PV}{T} = const$, которое в данном случае записывается в виде

$$\frac{P_0 S \Delta x}{T_0} = \frac{PS(1+\varepsilon)\Delta x}{T}. \tag{13}$$

Учитывая найденные зависимости давления и относительной деформации, из этого уравнения находим

[1] Еще раз отметим, что такая линейная зависимость получена для начальных координат рассматриваемых слоев – если же рассматривать зависимость от координаты движущегося и деформированного газа эта зависимость будет гораздо сложней!

$$T = T_0\left(1+\frac{\Delta P}{P_0}\left(1-\frac{x}{l_0}\right)\right)\left(1-\frac{\Delta P}{\gamma P_0}\left(1-\frac{x}{l_0}\right)\right). \quad (14)$$

Раскрывая скобки и пренебрегая малыми величинами второго порядка, это выражение приводится к виду

$$T = T_0\left(1+\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\Delta P}{P_0}\left(1-\frac{x}{l_0}\right)\right) \quad (15)$$

1.6 Установившуюся температуру газа между поршнями после установления теплового равновесия следует искать из условия сохранения внутренней энергии газа. Заметим, что это возможно, так как на этом этапе мы пренебрегаем работой внешних сил. Обратим внимание, что в использованном приближении температура также изменяется по линейному закону, поэтому установившуюся температуру можно найти, взяв среднее значение изменения температуры, поэтому

$$\bar{T} = T_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{\Delta P}{P_0}\right). \quad (16)$$

1.7 Для расчета изменения расстояния между поршнями после установления теплового равновесия следует применить ту же методику:

- распределение давлений определяется динамическими условиями, поэтому остается прежним и описывается формулой (7);
- установившееся распределение относительных деформаций находится из уравнения состояния газа, записанного для каждого слоя с учетом равенства их температур:

$$\frac{P_0 S\Delta x}{T_0} = \frac{PS(1+\bar{\varepsilon})\Delta x}{\bar{T}} \quad \Rightarrow \quad 1+\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{T}}{T_0}\frac{P}{P_0} = \left(1+\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{\Delta P}{P_0}\right)\left(1+\frac{\Delta P}{P_0}\left(1-\frac{x}{l_0}\right)\right) \approx$$
$$\approx 1+\frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{\Delta P}{P_0}+\frac{\Delta P}{P_0}\left(1-\frac{x}{l_0}\right) \quad (17)$$

- средняя относительная деформация оказывается равной

$$\langle\bar{\varepsilon}\rangle = \frac{\gamma-1}{2\gamma}\frac{\Delta P}{P_0}+\frac{\Delta P}{2P_0} = \frac{2\gamma-1}{2\gamma}\frac{\Delta P}{P_0}; \quad (18)$$

- наконец, изменение расстояния между поршнями становится равным

$$\Delta\bar{l}_2 = \langle\bar{\varepsilon}\rangle l_0 = \frac{2\gamma-1}{2\gamma}\frac{\Delta P}{P_0}l_0 \quad (19)$$

Из полученного выражения следует, что расстояние между поршнями увеличится, то есть в итоге – газ расширится!

Часть 2. В сопле переменного сечения.

2.1 Процесс расширения газа при прохождении сопла можно считать адиабатным, так как движение газа по соплу происходит достаточно быстро, а массу порции газа — постоянной:

$$pV^\gamma = const, m = const \Rightarrow p\rho^{-\gamma} = const.$$

И в результате:

$$\rho = \rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/\gamma}. \quad (20)$$

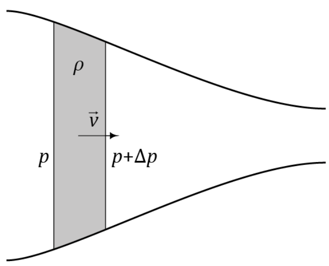
2.2 Используя (20), можно записать:

$$\rho+\Delta\rho = \rho_0\left(\frac{p+\Delta p}{p_0}\right)^{1/\gamma} \approx \rho_0\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{\gamma}} + \Delta p\frac{\rho_0}{\gamma}\frac{p^{\frac{1}{\gamma}-1}}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} \Rightarrow \Delta\rho = \Delta p\frac{\rho_0}{\gamma}\frac{p^{\frac{1}{\gamma}-1}}{p_0^{\frac{1}{\gamma}}} = \Delta p\frac{\rho}{\gamma p}.$$

Используя формулу локальной скорости звука, получим:

$$\Delta\rho = \frac{\Delta P}{c^2} \qquad (21)$$

2.3 Рассмотрим слой газа небольшой толщины Δx и площади S (считаем, что площадь практически не меняется за малое Δx). Запишем второй закон Ньютона для этого слоя в проекции на ось симметрии сопла:



$$ma = -\Delta pS.$$

Считаем порцию газа достаточно малым однородным слоем площадью S и толщиной Δx:

$$m = S\rho\Delta x \Rightarrow S\rho a\Delta x = -\Delta pS \Rightarrow \rho a\Delta x = -\Delta p.$$

Учитывая, что газ пройдет расстояние Δx за промежуток времени $\Delta t = \frac{\Delta x}{v}$, а скорость изменится на величину $\Delta v = a\Delta t$:

$$\Delta v = -\frac{\Delta p}{\rho v}. \qquad (22)$$

2.4 Так как масса газа, проходящая через сопло в единицу времени, Q должна быть постоянной величиной, получаем, что:

$$Q_+ - Q_- = 0,$$
$$\rho vS - (\rho + \Delta\rho)(v + \Delta v)(S + \Delta S) = 0.$$

Пренебрегая произведениями малых величин, получаем:

$$\Delta\rho vS + \rho\Delta vS + \rho v\Delta S = 0.$$

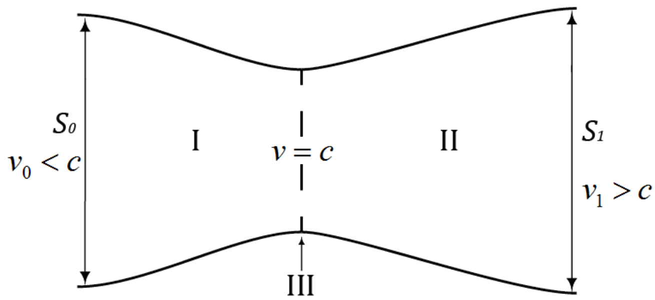
Подставим найденные ранее выражения для изменения плотности:

$$-\frac{\Delta v\rho v}{c^2}vS + \rho\Delta vS + \rho v\Delta S = 0$$

И выразим искомое изменение скорости

$$\Delta v = \frac{v\Delta S}{S\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)} \qquad (23)$$

2.5 Для этого пункта требуется анализ выражения (23). Движение газа через сопло можно разделить на три части, как это указано на рисунке:



I. $v < c$, $\Delta v > 0$, $\frac{v\Delta S}{S\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)} > 0$

Так как знаменатель меньше единицы, мы получаем, что $\Delta S < 0$.

II. $v > c$, $\Delta v > 0$, $\frac{v\Delta S}{S\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right)} > 0$

Так как знаменатель стал больше единицы, мы получаем, что $\Delta S > 0$.

III. $v = c$. Это переходная часть, где $\Delta S = 0$.

Таким образом, мы получили, что для того, чтобы газ постоянно ускорялся необходимо, чтобы сначала канал должен сужаться, а после достижения локальной скорости звука должен расширяется.