Задача 10-1. Сечение рассеяния

В школьных задачах на столкновение твердых тел или притяжение/отталкивание электрических зарядов обычно рассматривают два взаимодействующих тела, иногда три или четыре. В настоящих же экспериментах на ускорителях, в том числе на Большом адронном коллайдере, целый поток частиц, состоящий из их огромного количества, сталкивается с мишенью или с другим таким же потоком. Взаимодействуя, частицы разлетаются под различными углами, иначе говоря, рассеиваются. Величиной, измеряемой на эксперименте, является распределение количества частиц по углам их отклонения (рассеяния). Такое распределение называют сечением рассеяния.
В настоящей задаче предлагаем вам рассчитать сечение рассеяния для простого случая взаимодействия – упругого столкновения твердых тел. Влиянием поля тяжести во всей задаче можете смело пренебрегать.

Часть 0. Подготовка
На гладкую упругую плоскую закрепленную поверхность под углом φ к нормали падает некоторая частица. Здесь и далее под упругой поверхностью будем понимать отсутствие потерь механической энергии при столкновении с ней.

0.1. Покажите, что при столкновении будет выполняться «оптический» закон: угол падения равен углу отражения.
0.2. Выразите через φ угол рассеяния χ – угол между начальным направлением полета частицы и направлением полета после отражения.

Часть 1. Шар закреплен
Имеется закрепленный шар радиуса R с гладкой упругой поверхностью. На этот шар падает разреженный однородный поток очень малых частиц, скорости которых параллельны. Плотность потока частиц, то есть количество частиц, пролетающих через единицу поперечного сечения потока в единицу времени, равна j. При столкновении с шаром различные частицы будут рассеиваться на различные углы. Считайте, что поток частиц разрежен настолько, что их столкновение друг с другом после отлета от шара практически невероятно.
Для каждой отдельной налетающей на шар частицы ключевой характеристикой, определяющей ее дальнейшее рассеяние, является прицельное расстояние ρ – расстояние от направления ее скорости до центра шара (рис. 1).

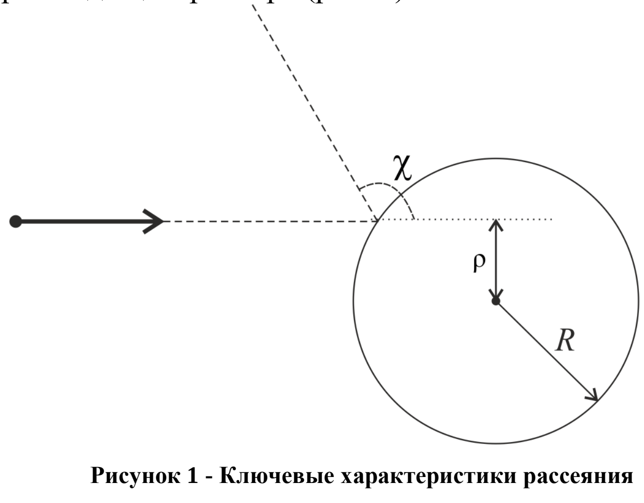

Рисунок 1 - Ключевые характеристики рассеяния

1.1. Найдите зависимость прицельного расстояния ρ некоторой частицы от угла ее рассеяния χ после столкновения с шаром. Определите диапазон возможных значений угла рассеяния χ.

Вообще говоря, вероятность того, что после столкновения некоторая частица отклонится ровно на наперед заданный угол, практически равна нулю. Поэтому обычно говорят о количестве частиц, которые рассеиваются на некоторый диапазон углов.

1.2. Получите выражение для количества частиц ΔN_χ, которые в единицу времени рассеются на угол в малом диапазоне от χ до $\chi + \Delta\chi$, где $\Delta\chi << \chi$.

Полученная величина уже показывает количество частиц из падающего на шар потока, которые после взаимодействия отлетят на тот или иной угол – то, что и требуется найти в задаче рассеяния. Однако, это количество ΔN учитывает все частицы, отклоняющиеся после столкновения и «вправо», и «влево», и «вверх», и «вниз» на угол χ – в общем виде улетающих «кольцом» вдоль образующей конуса с вершиной в центре шара (примерно) и углом полураствора χ (рисунок 2). Реальный же детектор в эксперименте – это не кольцо, а устройство с небольшой площадью («Д» на рисунке), которое помещают на некотором расстоянии от рассеивателя (центра шара) при разных углах χ.

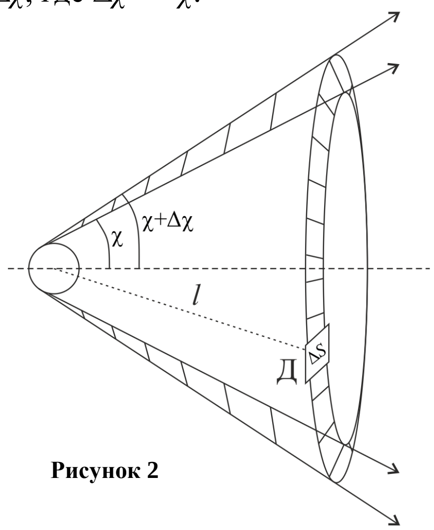

Рисунок 2

1.3. Получите выражение для количества частиц ΔN_S, которые в единицу времени попадают на детектор с малой площадью ΔS, расположенный на расстоянии l от центра шара ($l \gg R$) по направлению угла рассеяния χ.

Понятно, что если отодвинуть детектор дальше от шара, то количество попадающих на него частиц уменьшится, так как частицы разлетаются друг от друга с расстоянием. Чтобы фиксировать то же самое количество частиц, площадь детектора пришлось бы увеличивать. Легко показать, что для регистрации одного и того же числа частиц необходимо, чтобы величина $\Delta S/(l^2)$ сохранялась. Говорят, что разлетающийся поток частиц «вырезает» в пространстве телесный угол величиной $\Delta\Omega = {}^{\Delta S}/_{l^2}$, по аналогии с тем, как два луча «вырезают» на плоскости линейный угол величиной $\Delta\varphi = {}^{\Delta l}/_{R}$ (рис. 3). Внутри этого телесного угла число рассеянных частиц будет оставаться постоянным. Таким образом, чтобы в теоретических расчетах не учитывать размеры детектора, который будет использоваться на эксперименте, результаты оптимально выражать через элемент телесного угла $\Delta\Omega$.

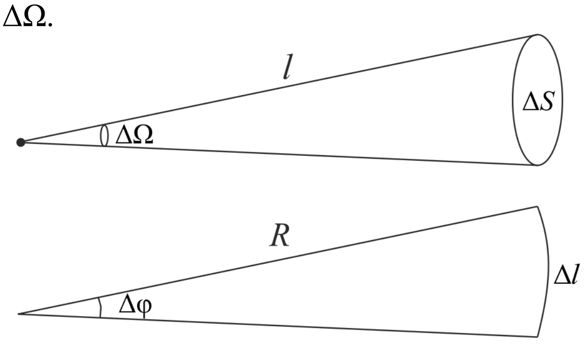

Рисунок 3 - Телесный угол и линейный угол

Другой «апгрейд» полученных формул можно получить из осознания того факта, что число отклонившихся в единицу времени частиц будет, очевидно, увеличиваться с ростом числа частиц в падающем потоке. Для того чтобы в формулах отражался лишь процесс рассеяния, предлагают искать не абсолютное, а относительное количество рассеянных частиц – для этого полученное число ΔN необходимо разделить на плотность потока падающих частиц j. Таким образом, получается величина, называемая дифференциальным сечением рассеяния: $\Delta\sigma = \frac{\Delta N}{j}$.

1.4. Получите выражение для дифференциального сечения рассеяния $\Delta\sigma$ отлетающих от шара частиц на единицу телесного угла $\Delta\Omega$ в зависимости от их угла отклонения χ. Качественно объясните полученный результат.
1.5. Просуммируйте полученный в пункте 1.4 результат во всем возможным углам χ, учитывая, что полный (развернутый) телесный угол равен 4π. Объясните полученный результат.

Часть 2. Шар не закреплен

В этой части будем считать, что большой шар радиуса R, по-прежнему с гладкой упругой поверхностью, не закреплен. Более того, будем считать, что имеется однородный разреженный слой таких незакрепленных шаров, на который по-прежнему налетает поток одинаковых маленьких частиц. Массу каждой частицы считайте равной массе большого шара. Поток частиц и слой шаров разрежены настолько, что столкновение частиц между собой и шаров между собой маловероятно. Также будем считать, что каждая частица испытает только одно столкновение с большим шаром. До начала столкновений все большие шары покоились. При этом после столкновения отлетать будут как маленькие частицы, так и большие шары.

2.1. Получите выражение для дифференциального сечения рассеяния $\Delta\sigma_1$ маленьких частиц (через χ_1, $\Delta\Omega_1$) в результате их столкновения с большими шарами.

2.2. Получите выражение для дифференциального сечения рассеяния $\Delta\sigma_2$ больших шаров (через χ_2, $\Delta\Omega_2$) в результате налета на них потока маленьких частиц.