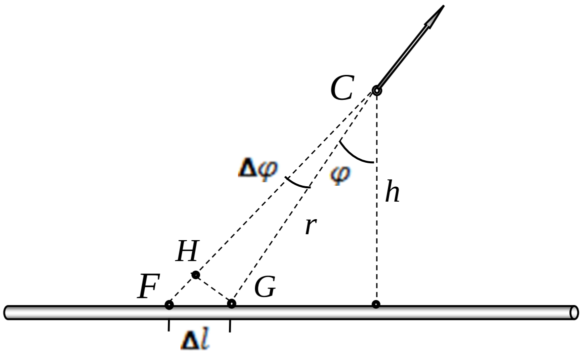
Задача 10-2. Заряженный стержень



1.1 Выделим на стержне маленький участок $FG = \Delta l$, который виден из точки С под малым углом $\Delta\varphi$ и находится на расстоянии $r = CG$ от точки *C*, а также на угловом расстоянии φ от отрезка h (см. рис.) С учетом того, что угол HGF также равен φ можем записать

$$\cos\varphi = \frac{h}{GC} = \frac{h}{r} = \frac{GH}{\Delta l} = \frac{r\Delta\varphi}{\Delta l}\ , \qquad (1)$$

откуда следует, что

$$\Delta l = \frac{r^2}{h}\Delta\varphi\ . \qquad (2)$$

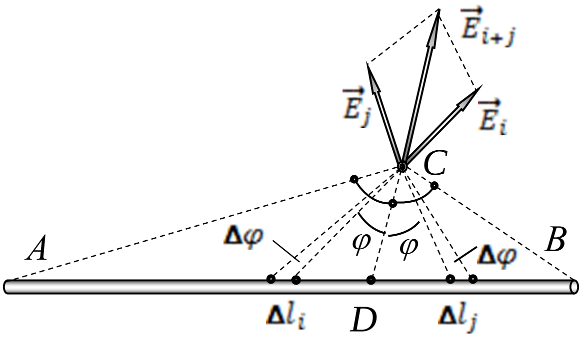
Поскольку стержень заряжен равномерно, то на участке стержня Δl находится заряд $\Delta q = \lambda\Delta l$, который, согласно закону Кулона, создаёт в точке С напряженность $\Delta\vec{E}$, равную по модулю

$$\Delta E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\Delta q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r^2}\frac{r^2}{h}\Delta\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{h}\Delta\varphi\ . \qquad (3)$$

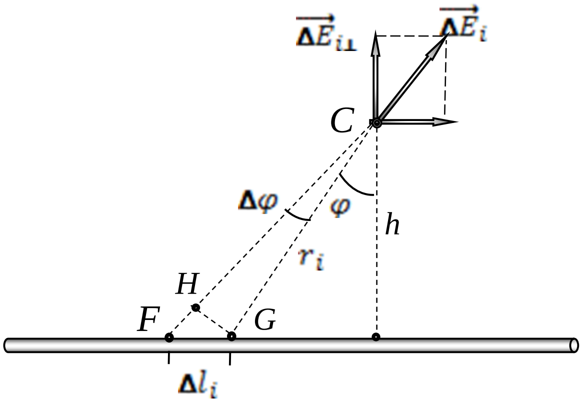
Поскольку для разных участков стержня величины λ и h постоянны, то из (3) следует неожиданный вывод, что $\Delta\vec{E}$ не зависит ни от r, ни от φ, а определяется только малым углом $\Delta\varphi$, под которым данный малый отрезок виден из точки *C*. Соответственно, из (3) найдем искомое значение коэффициента пропорциональности

$$k_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{h} = 1{,}5\cdot 10^3\,\frac{\text{Н}}{\text{Кл}\cdot\text{рад}} = 1{,}5\,\frac{\text{кН}}{\text{Кл}\cdot\text{рад}} \qquad (4)$$

1.2 Рассмотрим два симметричных (по углу φ) относительно биссектрисы *DC* малых участка стержня Δl_i и Δl_j, имеющих одинаковую угловую ширину $\Delta\varphi$. Согласно (3), векторы напряженностей $\vec{E}_i$ и $\vec{E}_j$, создаваемых ими, равны по модулю и симметричны относительно биссектрисы угла. Следовательно, их сумма $\vec{E}_{i+j}$ ориентирована вдоль биссектрисы угла. Заметим, что длины (и заряды!) отрезков Δl_i и Δl_j различны, но согласно (2) большему отрезку соответствует большее расстояние, что и приводит к равенству модулей соответствующих напряженностей.



Разбивая стержень на подобные пары и суммируя их напряженности, приходим к выводу, что напряженность $\vec{E}$ электростатического поля всего стержня также направлена вдоль биссектрисы угла $A\hat{C}B$.



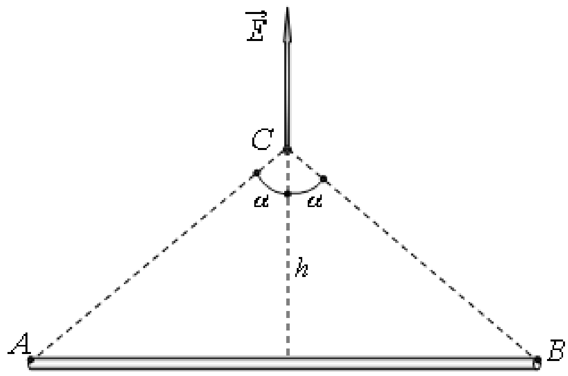
1.3 Для вычисления нормального компонента $\overrightarrow{E_\perp}$ напряженности электростатического поля всего стержня рассмотрим малый элемент стержня длиной Δl_i (Рис.), находящийся на расстоянии r_i от точки наблюдения. Пусть нормальный компонент поля этого элемента равен $E_{i\perp} = E_i \cos\varphi_i$. Тогда искомая величина $E_\perp$ будет представлена суммой

$$E_\perp = \sum_i E_{i\perp} = \sum_i E_i \cos\varphi_i \quad . \tag{5}$$

Однако, с учётом (3), сумма значительно упрощается. Действительно, при таком подходе имеем

$$E_\perp = \sum_i E_i \cos\varphi_i = \sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{h}\cos\varphi_i \Delta\varphi_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{h}\sum_i \cos\varphi_i \Delta\varphi_i \quad , \tag{6}$$

сумма $S = \sum_i \cos\varphi_i \Delta\varphi_i$, входящая в выражение (6), представляет собой площадь под графиком функции $y(x) = \cos(x)$. И, согласно математической подсказке в условии, равна $S = \sum_i \cos\varphi_i \Delta\varphi_i = \sin\varphi$. Заметим, что геометрический смысл этой суммы – сумма проекций хорд на диаметр окружности. Это замечание вполне позволяет получить математическую подсказку в условии самостоятельно.



Таким образом, часть заряженного стержня, соответствующая углу α в условии, создает нормальную напряженность $E_{\perp\alpha} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{h}\sin\alpha$, а вторая часть стержня – точно такую же.

$$E_C = 2E_\perp = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{h}(\sin\alpha + \sin\alpha) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{h}\sin\alpha \quad . \tag{7}$$

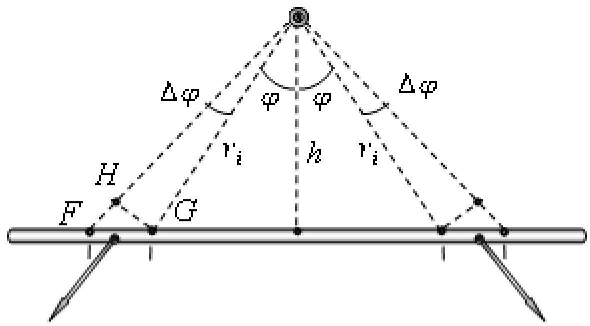
Естественно, что вектор $\overrightarrow{E_\perp}$ ориентирован перпендикулярно стержню в направлении «от него». Если бы заряд стержня был отрицателен, то направление было бы «к нему».

1.4 Для перехода к полю бесконечного тонкого равномерно заряженного стержня в формуле (7) следует положить $\alpha = \frac{\pi}{2}$. При этом получаем, что напряженность электростатического поля бесконечного стержня на расстоянии h от него равна по модулю

$$E(h) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{h}\sin\frac{\alpha+\alpha}{2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{h} \tag{8}$$

и направлена перпендикулярно стержню.

1.6 Изобразим скрещивающиеся заряженные стержни на чертеже так, чтобы один из них (создающий поле) был виден в виде точки, а второй (на который действует поле) – находился в плоскости чертежа. На маленький кусочек FG стержня длиной



$$FG = \Delta l = \frac{HG}{\cos\varphi} = \frac{r\Delta\varphi}{\cos\varphi} \tag{9}$$

действует сила, определяемая зарядом $\lambda\Delta l$ рассматриваемого кусочка и полем $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ в данной точке пространства.

Поскольку силы, действующие вдоль стержня, будут скомпенсированы, то нам следует искать только силы, перпендикулярные к стержню. Тогда для участка FG можем записать

$$\Delta F = E(r)\lambda\Delta l \cos\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\lambda\frac{r\Delta\varphi}{\cos\varphi}\cos\varphi = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\Delta\varphi \quad . \tag{10}$$

Суммируя (10) по всем кусочкам стержня, найдем величину силы электростатического расталкивания стержней, которая перпендикулярна стержню и ориентирована по продолжению высоты h на рисунке

$$F = \sum_i \Delta F_i = \sum_i \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\Delta\varphi_i = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\sum_i \Delta\varphi_i = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0}\cdot\pi = \frac{\lambda^2}{2\varepsilon_0} = 3{,}5\cdot 10^{-5}\ \text{Н} = 35\ \text{мкН}\ . \quad (11)$$

Интересно, что сила взаимодействия между заряженными стержнями не зависит от расстояния h между ними. Следовательно, при изменении расстояния h ответ (11) не изменится. Это связано с влиянием двух факторов: при удалении стержней друг от друга поле, естественно, уменьшается, но увеличивается заряд, попадающий на отрезок FG стержня при данном угле $\Delta\varphi$.