Задача 10- 3. Термоэлектрические явления.

Часть 1. Закон Ома.

1.1. На каждый ион в металле приходится Z электронов, причём массой электронов в сравнении с массой иона можно пренебрегать. В соответствии с этим

$$n = \frac{N}{V} = \frac{Z\frac{\rho V N_A}{A}}{V} = \frac{Z\rho N_A}{A} = 8{,}44 \cdot 10^{28}\,\text{м}^{-3}. \qquad (1)$$

1.2. Так как электронный газ считается идеальным, к нему можно применить методы кинетической теории газов, в соответствии с чем

$$\frac{m_e\langle v^2\rangle}{2} = \frac{3kT}{2} \Rightarrow \sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} = 1{,}17 \cdot 10^{28}\,\text{м} \cdot \text{с}^{-1}. \qquad (2)$$

1.3. В электрическом поле в соответствии со вторым законом Ньютона для электронов

$$e\vec{E} = m_e\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}. \qquad (3)$$

Тогда по прошествии времени t после предыдущего столкновения электрон имеет скорость

$$\vec{v} = \vec{v_0} + \frac{e\vec{E}t}{m_e}, \qquad (4)$$

где $\vec{v_0}$ — скорость, полученная электроном в результате столкновения. Тогда, учитывая, что среднее время между столкновениями равно времени релаксации, а скорость после столкновения направлена случайным образом, получаем, что $\langle\vec{v}\rangle = \langle\vec{v_0} + \frac{e\vec{E}t}{m_e}\rangle = \langle\frac{e\vec{E}t}{m_e}\rangle = \frac{e\vec{E}\langle t\rangle}{m_e} = \frac{e\vec{E}\tau}{m_e}$.
(5)

1.4. Плотность тока в данном случае найдем

$$\vec{j} = ne\langle\vec{v}\rangle = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} = \sigma\vec{E} \qquad (6)$$

по закону Ома. Тогда

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m}. \qquad (7)$$

1.5. С учетом (7) для среднего времени между столкновениями получаем

$$\gamma = \frac{1}{\sigma} = \frac{m}{ne^2\tau} \Rightarrow \tau = \frac{m}{ne^2\gamma} = 2{,}51 \cdot 10^{-14}\,\text{с}. \qquad (8)$$

Часть 2. Закон Джоуля-Ленца.

2.1. Найдем среднюю энергию, передаваемую электроном кристаллической решетке за одно столкновение. Если $\vec{v_1}$ — скорость электрона сразу после столкновения, а $\vec{v_0}$ — непосредственно перед ним, то

$$\text{H} = \frac{m_e}{2}\left(\langle v_1\rangle^2 - \langle v_0\rangle^2\right). \qquad (9)$$

Выражение для $\vec{v_1}$ удобно привести к виду

$$\langle v_1^2\rangle = \langle\left(\vec{v_0} + \frac{e\vec{E}t}{m_e}\right)^2\rangle \approx \langle v_0^2\rangle + 2\left(\frac{eE}{m_e}\right)^2\langle\tau^2\rangle = \langle v_0^2\rangle + 2\left(\frac{eE\tau}{m_e}\right)^2$$

из которого следует искомое значение

$$\langle v_1^2\rangle = \langle\left(\vec{v_0} + \frac{e\vec{E}t}{m_e}\right)^2\rangle = \langle v_0^2\rangle + \left(\frac{eE}{m_e}\right)^2\langle\tau^2\rangle = \langle v_0^2\rangle + 2\left(\frac{eE\tau}{m_e}\right)^2 \Rightarrow \mathrm{H} = \frac{(eE\tau)^2}{m_e} \qquad (10)$$

2.2. Тогда мощность, выделяемую в единице объёма, можно найти как

$$w = \frac{n}{\tau}\mathrm{H} = \frac{n\tau(eE)^2}{m_e} = \sigma E^2 = 5{,}95\cdot 10^{11}\ \text{Вт}\cdot\text{м}^{-3}. \qquad (11)$$

Как следует из закона Ома в дифференциальной форме

$$j = \sigma E \Rightarrow P = \frac{j^2}{\sigma}LS, \qquad (12)$$

где L и S — длина и площадь сечения стержня соответственно. Тогда

$$w = \frac{(jS)^2}{\sigma S}L\cdot\frac{1}{V} = \frac{1}{\sigma}j^2. \qquad (13)$$

Часть 3. Закон Видемана - Франца.

3.1. Перенос теплоты осуществляется за счёт того, что электроны, пришедшие из областей с более высокой температурой, сталкиваясь с ионами в областях с меньшей температурой, отдают им больше энергии, чем получают от них. Рассмотрим некоторое поперечное сечение внутри металла. В среднем половина электронов приходит в эту точку со стороны положительного направления оси x, а половина — со стороны отрицательного.

Тогда плотность потока теплоты, обусловленная электронами, пришедшими со стороны отрицательного направления оси x с проекцией скорости v_x равна

$$q_-(x) = \frac{1}{2}n_x v_x\cdot\frac{3}{2}kT(x - v_x\tau), \qquad (14)$$

а с положительного —

$$q_+(x) = -\frac{1}{2}n_x v_x\cdot\frac{3}{2}kT(x + v_x\tau), \qquad (15)$$

где n_x — концентрация электронов с проекцией скорости v_x.

Тогда полная плотность потока теплоты для электронов с проекцией скорости v_x равна

$$q(x) = \frac{3}{4}kn_xv_x\big(T(x - v_x\tau) - T(x + v_x\tau)\big). \qquad (16)$$

Предполагая, что температура меняется незначительно на длине свободного пробега электрона, получаем, что

$$T(x \pm v_x\tau) \approx T(x) \pm v_x\tau\frac{\Delta T}{\Delta x}(x) \Rightarrow q(x) = -\frac{3}{2}kn_xv_x^2\tau\frac{\Delta T}{\Delta x}(x). \qquad (17)$$

Тогда полная плотность потока теплоты

$$q(x) = -\sum \frac{3}{2} k n_x v_x{}^2 \tau \frac{\Delta T}{\Delta x}(x) = -\frac{3}{2} k n \langle v_x{}^2 \rangle \tau \frac{\Delta T}{\Delta x}(x) = -\frac{1}{2} k n \langle v^2 \rangle \tau \frac{\Delta T}{\Delta x}(x), \tag{18}$$

так как $\langle v_x{}^2 \rangle = \frac{1}{3}\langle v^2 \rangle$.

3.2. Для теплопроводности металла (меди) получаем следующее значение

$$\kappa = \frac{1}{2} k n \langle v^2 \rangle \tau = 1{,}99 \cdot 10^2 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}. \tag{19}$$

3.3. Численное значение постоянной Лоренца найдем из формулы подсказки

$$L = \frac{\kappa}{\sigma T} = \frac{3}{2}\left(\frac{k}{e}\right)^2 = 1{,}12 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} \cdot \text{Ом} \cdot \text{К}^{-2}. \tag{20}$$

Часть 4. Эффект Томсона.

4.1. Рассуждения в данном пункте практически полностью повторяют оные из пункта 2.1. Действительно, при этом

$$\langle v_Q \rangle = \langle \frac{1}{2}(v_x(x - v_x\tau) - v_x(x + v_x\tau)) \rangle = -\langle \tau v_x \frac{\Delta v_x}{\Delta x} \rangle \tag{21}$$

С учетом правил работы с бесконечно малыми величинами, данное выражение можно преобразовать как

$$\langle v_Q \rangle = -\langle \tau v_x \frac{\Delta v_x}{\Delta x} \rangle = -\langle \frac{\tau}{2} \frac{\Delta v_x{}^2}{\Delta x} \rangle = -\frac{\tau}{2} \frac{\Delta \langle v_x{}^2 \rangle}{\Delta x} = -\frac{\tau}{6} \frac{\Delta \langle v^2 \rangle}{\Delta x} = -\frac{k\tau}{2m_e} \frac{\Delta T}{\Delta x}. \tag{22}$$

4.2. Пусть электрон испытывает одно столкновение в точке с координатой $x - d$, а второе — в точке с координатой x. Тогда выделение теплоты во втором столкновении равно

$$Q = \frac{m_e}{2}(\langle v_1 \rangle^2 - \langle v_0 \rangle^2) = \frac{m_e}{2}\left(2\left(\frac{eE\tau}{m_e}\right)^2 + \langle v_0(x - d) \rangle^2 - \langle v_0(x) \rangle^2\right). \tag{23}$$

Полученное выражение можно привести к виду

$$\langle v_0(x - d) \rangle^2 - \langle v_0(x) \rangle^2 = -\frac{\Delta \langle v_0(x) \rangle^2}{\Delta x}\langle d \rangle = -\frac{3k}{m_e}\frac{\Delta T}{\Delta x}\langle v_{0x}t + \frac{eEt^2}{2m_e} \rangle = -\frac{3keE\tau^2}{m_e{}^2}\frac{\Delta T}{\Delta x}, \tag{24}$$

Откуда следует, что

$$p = \frac{(eE\tau)^2}{m_e} - \frac{3keE\tau^2}{2m_e}\frac{\Delta T}{\Delta x}. \tag{25}$$

Численное значение дает

$$p = -\frac{3nkeE\tau}{2m_e}\frac{\Delta T}{\Delta x} = -\frac{3nkeE\tau}{2m_e}\lambda = 7{,}71 \cdot 10^6 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-3}. \tag{26}$$

4.3. Из формулы (25) следует, что мощность дополнительной теплоты Томсона пропорциональна плотности тока и градиенту температур, причем коэффициент пропорциональности равен

$$\mu = -\frac{3k}{2e}. \tag{27}$$