Задача 11-2. Аквариум

1.1 Если шарик находится в центре сосуда, то все лучи выходящие от него будут пересекать стенки сферического аквариума по нормали, следовательно, без изменения направления распространения. Поэтому при наблюдении с любой стороны при любом показателе преломления изображение шарика также будет находиться в центре шара.

1.2 Ход лучей показан на рисунке 1. Видно, что изображение **A** предмета **B** находится на глубине h, меньшей, чем действительная глубина H.

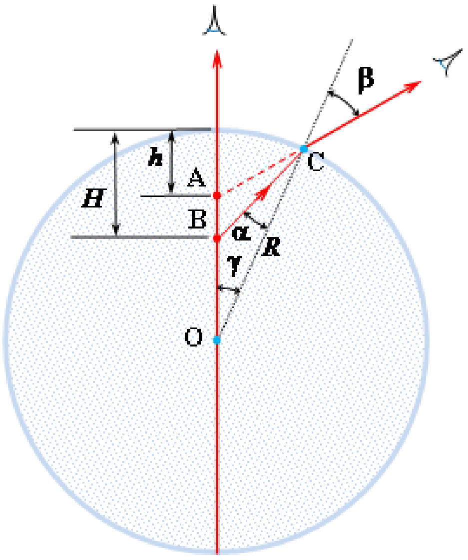

Рис. 1

Применим теорему синусов к ΔOBC:

$$\frac{OB}{\sin\alpha} = \frac{OC}{\sin(180° - \alpha - \gamma)} \Rightarrow$$

$$\frac{R-H}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha+\gamma)}.$$

Поскольку углы α, β и γ малые, то

$$\sin\alpha \approx \alpha, \quad \sin(\alpha+\gamma) \approx \alpha+\gamma \quad \Rightarrow$$

$$\frac{R-H}{\alpha} = \frac{R}{\alpha+\gamma} \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{H\alpha}{R-H}.$$

Совершенно аналогично рассматривая ΔOAC, получим: $\gamma = \dfrac{h\beta}{R-h}$. Приравняем правые части выражений, полученных для γ:

$$\frac{H\alpha}{R-H} = \frac{h\beta}{R-h} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{h}{H} \cdot \frac{R-H}{R-h}.$$

Используя закон преломления света, получим: $\dfrac{1}{n} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \dfrac{\alpha}{\beta} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{n} = \dfrac{h}{H} \cdot \dfrac{R-H}{R-h} \quad \Rightarrow$

$$h = \frac{HR}{nR - (n-1)H}.$$

Введем безразмерный параметр $x = \dfrac{H}{R}$. В результате: $h = \dfrac{H}{n-(n-1)\xi}$ или

$$y = \frac{h}{R} = \frac{x}{n-(n-1)x}.$$

1.3 Ход лучей в этом случае показан на рисунке 2. Видно, что изображение предмета находится на глубине, большей, чем действительная глубина. Ход решения в этом случае аналогичен.

Применим теорему синусов к ΔBOC:

$$\frac{OB}{\sin\alpha}=\frac{OC}{\sin\gamma}\quad\Rightarrow$$

$$\frac{H-R}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin\gamma}.$$

Поскольку углы α, β и γ малые, то

$$\sin\alpha\approx\alpha,\quad \sin\gamma\approx\gamma\quad\Rightarrow$$

$$\frac{H-R}{\alpha}=\frac{R}{\gamma}\quad\Rightarrow\quad\gamma=\frac{R\alpha}{H-R}.$$

Применяя теорему синусов к ΔAOC, получим:

$$\frac{AO}{\sin\beta}=\frac{OC}{\sin\delta}\quad\Rightarrow\quad\frac{h-R}{\sin\beta}=\frac{R}{\sin\delta}.$$

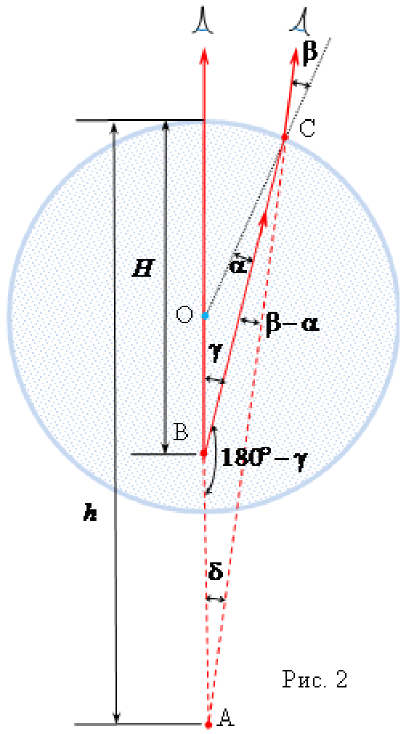

Рис. 2

На рисунке 2 видно, что в ΔAOC $\delta=180°-(180°-\gamma)-(\beta-\alpha)=\gamma-\beta+\alpha$.

В результате: $\dfrac{h-R}{\sin\beta}=\dfrac{R}{\sin(\gamma-\beta+\alpha)}\quad\Rightarrow\quad\gamma-\beta+\alpha=\dfrac{R\beta}{h-R}$.

Подставляя выражение для γ и используя закон преломления $\dfrac{1}{n}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\approx\dfrac{\alpha}{\beta}$, получим:

$$\frac{R}{H-R}\alpha-\alpha n+\alpha=\frac{R}{h-R}\alpha n\quad\Rightarrow\quad h=\frac{HR}{nR-(n-1)H}$$

или

$$y=\frac{h}{R}=\frac{x}{n-(n-1)x},$$

что совпадает с формулой полученной для случая, когда тело было выше центра шара.

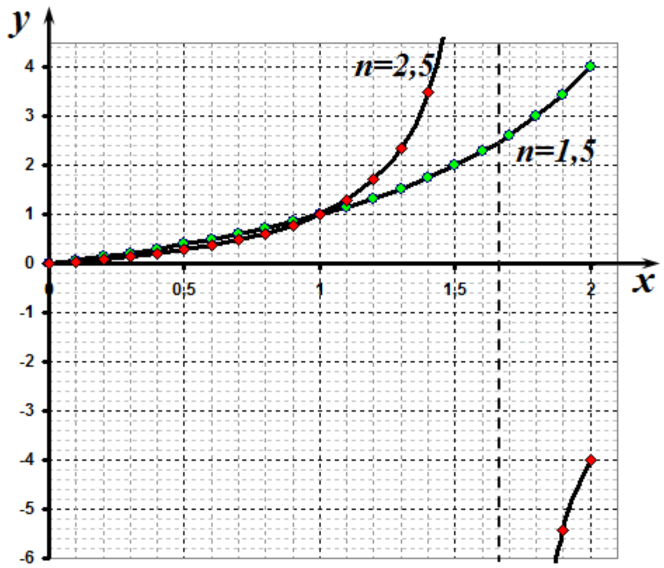

Рис. 3

1.4 Графики полученных зависимостей показаны на рисунке 3. При $n=2{,}5$ эта график этой зависимости терпит разрыв и устремляется к $y\to\pm\infty$. Физический смысл этого явления можно понять: шарик переходи через фокус сферической поверхности.

1.5. Для вычисления видимой скорости движения шарика следует вычислить производную от видимой координаты $u = \dfrac{dh}{dt}$. Т.к. $h = \dfrac{HR}{nR-(n-1)H}$, то

$$u = \frac{(nR-(n-1)H)R + HR(n-1)}{(nR-(n-1)H)^2}\upsilon \quad \Rightarrow \quad u = \frac{nR^2}{(nR-(n-1)H)^2} \quad \Rightarrow$$

В безразмерных координатах эта зависимость имеет вид

$$\chi = \frac{n}{(n-(n-1)x)^2}\,.$$

Графики этих функций показаны на рис. 4

1.6 График этих зависимостей показан на рисунке 4. Эта функция также терпит разрыв в указанной точке. Но скорость движения изображения шарика все время остается положительной.

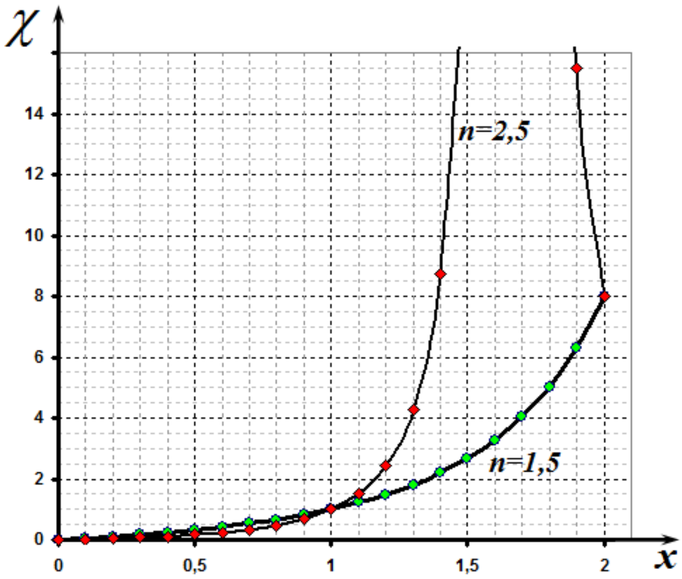

Рис. 4

Часть 2.

2.1 В общем случае положение изображения зависит от точки наблюдения. Поэтому в данной части задачи нельзя пользоваться результатами, полученными в первой части задачи. Для построения изображения надо построить, по крайней мере, два луча и найти их точку пересечения.

Направим ось X вдоль линии наблюдения. В этой системе шарик движется под углом $45°$ к осям координат. Рассмотрим положение шарика в момент времени непосредственно предшествующий его прохождению через центр, когда его координаты равны $x = a,\ \ y = a$, причем величина a является малой. В качестве первого луча возьмем луч, попадающий на стенку в точке $x = 0$. Построение этого луча понятно из

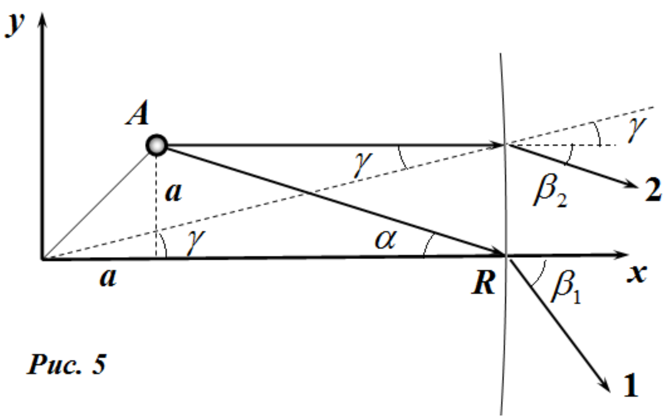

Рис. 5

рисунка 5. Полагая все углы малыми находим угол, под которым выходит преломленный луч.

$$\beta_1 = n\alpha = n\frac{a}{R-a}. \tag{1}$$

Уравнения этого луча имеет вид

$$y = -\frac{na}{R-a}(x-R) \tag{2}$$

Второй луч направим параллельно оси X. Для этого луча также не сложно найти уравнение:

Из закона преломления и геометрических построений следует, что угол наклона преломленного луча равен

$$\beta_2 + \gamma = n\gamma \quad \Rightarrow \quad \beta_2 = (n-1)\gamma \tag{3}$$

где $\gamma = \frac{a}{R}$. Тогда уравнение этого луча имеет вид

$$y = a - \frac{(n-1)a}{R}(x-R). \tag{4}$$

Изображением шарика является точка пересечения этих лучей. Координаты этой точки являются результатом совместного решения уравнений (2) и (4). Аккуратное решение этой системы уравнений приводит к следующему результату.

$$\begin{aligned} x &= R - R\frac{R-a}{R+(n-1)a} \\ y &= \frac{nRa}{R+(n-1)a} \end{aligned} \tag{5}$$

Далее необходимо упростить данные выражения, полагая $a << R$. В формуле для координаты y можно пренебречь a в знаменателе:

$$y \approx na \tag{6}$$

Для координаты x следует проделать следующие преобразования

$$x = R - R\frac{R-a}{R+(n-1)a} = R\left(1 - \frac{1-\frac{a}{R}}{1+(n-1)\frac{a}{R}}\right) \approx R\left(1-\left(1-\frac{a}{R}-n-1)\frac{a}{R}\right)\right) \approx na. \tag{7}$$

Таким образом, мы получили, что координаты изображения просто в n раз больше действительных координат шарика. Следовательно, все кинематические характеристики движения изображения шарика (в т.ч. и вектор скорости) так же будут в $n = 1{,}5$ больше соответствующих характеристик движения самого шарика. Таким образом. Вектор скорости видимого движения совпадает по направлению с вектором $\vec{V}$, но его длина в полтора раза больше.